su profesor particular

MATEMATICAS PARA TODOS

ENCICLOPEDIA UNIVERSAL DE MATEMATICAS

E.G.B. / B.U.P.
C.O.U. / SELECTIVIDAD
FORMACION PROFESIONAL / OPOSICIONES

INDICE DEL VOLUMEN 4

NUMEROS COMPLEJOS (Continuación Tema 32) **961**

13. CONCEPTOS PREVIOS.
    - 13.1. Operaciones con complejos.
    - 13.2. Unidad imaginaria
    - 13.3. Forma binómica del número complejo.
    - 13.4. Operaciones con complejos en forma binómica.
14. ESTRUCTURA EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.
15. ELEMENTOS CONJUGADOS. PROPIEDADES.
16. REPRESENTACION VECTORIAL.
17. MODULO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.
18. FORMULA MODULO-ARGUMENTAL O TRIGONOMETRICA.
19. OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA TRIGONOMETRICA.
    - 19.1. Suma de números complejos en forma trigonométrica.
    - 19.2. Producto de números complejos en forma trigonométrica.
    - 19.3. Cociente de números complejos en forma trigonométrica.
    - 19.4. Potencia de números complejos en forma trigonométrica.
20. OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMULA MODULO-ARGUMENTAL.
    - 20.1. Producto de números complejos.
    - 20.2. Cociente de números complejos.
    - 20.3. Potencia de números complejos.
21. RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.
    - 21.1. Raíz cuadrada de un complejo en forma binómica.
    - 21.2. Raíces n-esimas de un complejo en forma trigonométrica.
    - 21.3. Raíces de números reales.
22. RAICES N-ESIMAS DE LA UNIDAD.
23. PROPIEDADES DE LAS RAICES N-ESIMAS DE LA UNIDAD.
24. RAICES PRIMITIVAS DE LA UNIDAD. PROPIEDADES.
25. FORMA EXPONENCIAL DEL NUMERO COMPLEJO: LOGARITMOS.
26. LOGARITMOS NEPERIANOS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.
27. POTENCIAS DE BASE Y EXPONENTE COMPLEJO.
28. TRANSFORMACIONES.
    - 28.1. Transformaciones mediante funciones elementales.
    - 28.2. Funciones lineales.
        - a) Transformación $W = Z + C$
        - b) Transformación $W = BZ$
        - c) Transformación $W = BZ + C$
    - 28.3 Función potencial.
    - 28.4 Función inversa.
29. EJERCICIOS Y SOLUCIONES.

TEMA 33

TOPOLOGIA DE LA RECTA. ESPACIOS TOPOLOGICOS 1018

1. DEFINICION DE RECTA REAL.
2. RECTA REAL AMPLIADA.
3. VALOR ABSOLUTO. PROPIEDADES.
4. EL ORDEN DE LA RECTA REAL.
5. INTERVALOS DE LA RECTA REAL
6. POSTULADO DE CANTOR.
7. ENTORNO DE UN PUNTO.
8. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.
9. PUNTOS DE UN CONJUNTO.
   - 9.1. Punto de acumulación. Teorema.
   - 9.2. Punto interior.
   - 9.3. Punto aislado.
   - 9.4. Punto adherente.
10. CLASIFICACION DE LOS CONJUNTOS LINEALES.
11. CONJUNTOS ACOTADOS-TEOREMA.
12. TEOREMA DE BOREL —LEBESGUE.— COMPACIDAD.
13. TEOREMA DE BOLZANO WEIRSTRASS.
14. ESPACIO TOPOLOGICO.
15. ENTORNOS. PROPIEDADES
16. PUNTO DE ACUMULACION.
17. PUNTO ADHERENTE.
18. OPERADOR CLAUSURA.
19. PUNTO AISLADO.
20. PUNTO INTERIOR.
21. PUNTO EXTERIOR.
22. PUNTO FRONTERA. PROPIEDADES.
23. FILTROS Y LIMITES.
24. BASE DE FILTRO.— FILTROS CONVERGENTES.
25. PUNTO ADHERENTE A UNA BASE DE FILTRO.
26. BOLA ABIERTA.
27. BOLA CERRADA.
28. EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 34

SUCESIONES Y LIMITES 1037

1. VALOR ABSOLUTO. PROPIEDADES.
2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.
3. INTERVALOS EN LA RECTA REAL.
4. SUCESION DE NUMEROS REALES.
5. IGUALDAD DE SUCESIONES.
6. FORMAS DE REPRESENTACION DE SUCESIONES.
7. SUBSUCESIONES.
8. OPERACIONES CON SUCESIONES.
   - 8.1. Suma de sucesiones.
   - 8.2. Resta de sucesiones.
   - 8.3. Multiplicación de sucesiones.
   - 8.4. División.
   - 8.5. Producto de una sucesión por un número real.
   - 8.6. Potencia de exponente un número.
   - 8.7. Potencia de exponente una sucesión.
9. SUCESIONES MONOTONAS.
10. SUCESIONES ACOTADAS.
11. SUCESIONES DE CAUCHY.
12. SUCESIONES CONVERGENTES DE NUMEROS REALES. LIMITE DE UNA SUCESION DE NUMEROS REALES

13. SUCESIONES DIVERGENTES.
14. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES DE NUMEROS REALES.
15. INFINITESIMOS.
15.1. Infinitésimos equivalentes.
15.2. Propiedades de los infinitésimos.
16. ALGEBRA DE LIMITES. CUADRO RESUMEN DE LAS OPERACIONES CON LIMITES.
16.1. Límite de una suma de sucesiones.
16.2. Límite de un cociente producto de sucesiones.
16.3. Límite de un cociente de sucesiones.
16.4. Límite de potencias de sucesiones.
17. EL NUMERO «e».— SUCESIONES RELACIONADAS CON EL.
18. CALCULO DE LIMITES.
18.1. Límite del cociente de dos polinomios en «n».
18.2. Límite del logaritmo.
18.3. Cálculo con límites infinitos.
19. REGLAS PRACTICAS PARA EL CALCULO DE LIMITES DE SUCESIONES REALES O RACIONALES.
19.1. Criterio de Stolz.
19.2. Criterio de la media aritmética.
19.3. Criterio de la media geométrica.
19.4. Criterio de la raíz.
20. RESUMEN DE FORMULAS UTILES EN EL CALCULO DE LIMITES.
21. ESTUDIO DE SUCESIONES.
21.1. Sucesiones recurrentes simples.
21.2. Sucesiones simultáneamente recurrentes.
21.3. Sucesiones con recurrencia lineal.
22. SERIES NUMERICAS.
22.1. Serie geométrica.
23. CONSTANTE DE EULER.
24. PROBLEMAS Y SOLUCIONES.

TEMA 35
OORDENADAS **1126**
1. INTRODUCCION.
2. COORDENADAS PARAMETRICAS.
3. COORDENADAS HOMOGENEAS.
4. TRANSFORMACION DE COORDENADAS CARTESIANAS.
4.1. En el plano.
4.2. En el espacio.
5. COORDENADAS POLARES EN EL PLANO.
6. COORDENADAS BIPOLARES.
7. COORDENADAS BIANGULARES.
8. COORDENADAS PLUCKERIANAS O TANGENCIALES.
9. COORDENADAS TRILINEALES.
10. COORDENADAS ESFERICAS.
11. COORDENADAS CILINDRICAS.

TEMA 36
FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL..... **1145**
INTRODUCCION.
1. FUNCIONES NUMERICAS. DEFINICION.
2. FUNCIONES MONOTONAS CRECIENTES Y DECRECIENTES.
3. FUNCIONES ACOTADAS.
4. FUNCIONES EN ESCALERA. FUNCIONES CONVEXAS.

5. OPERACIONES CON FUNCIONES.
6. LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.
7. LIMITES LATERALES.
8. UNIDAD DEL LIMITE.
9. ALGEBRA DE LIMITES.
10. INDETERMINACIONES.
11. INFINITESIMOS, NOTACIONES Y PROPIEDADES.
12. FUNCIONES CONTINUAS.
    12.1. Definición.
    12.2. Algebra de funciones continuas.
    12.3. Discontinuidades.
    12.4. Propiedades de la función continua.
    12.5. Composición de funciones continuas.
13. CONTINUIDAD UNIFORME.
14. FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE NATURAL.
15. FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE ENTERA.
    15.1. Propiedades de las funciones exponenciales de variable entera.
16. FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE RACIONAL.
    16.1. Propiedades de la función exponencial de variable racional.
17. FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE REAL.
    17.1. Representación gráfica de la función exponencial de variable real.
    17.2. Límite de la función exponencial de variable real.
18. FUNCION EXPONENCIAL NEPERIANA.
    18.1. Representación gráfica de la función exponencial neperiana.
19. ECUACIONES EXPONENCIALES.
    19.1. Sistema de ecuaciones exponenciales.
20. EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 37

DERIVADAS **1195**

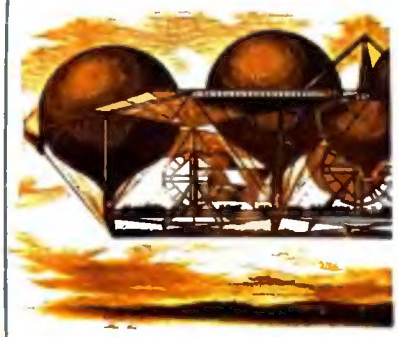
INDICE

1. DERIVADA DE UNA VARIABLE EN UN PUNTO.
2. FUNCION DERIVADA DE UNA FUNCION.
3. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA.
4. PROPIEDADES DE LA DERIVACION DE FUNCIONES.
    4.1. Continuidad.
    4.2. Operaciones.
5. CALCULO DE DERIVADAS.
    5.1. Derivada de una función constante.
    5.2. Derivada de la función idéntica.
    5.3. Derivada de la función x^2.
    5.4. Derivada de la función x^3.
    5.5. Derivada de la función $y = x^n$
    5.6. Derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^n}$
    5.7. Derivada del cociente de dos funciones.
    5.8. Derivada de un polinomio.
    5.9. Derivada de la función logarítmica.
    5.10. Derivada de la función exponencial.
6. DERIVADA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.
    6.1. Derivada de la función seno.
    6.2. Derivada de la función coseno.
    6.3. Derivada de la función tangente.
    6.4. Derivada de la función cotangente.
    6.5. Derivada de la función secante.
    6.6. Derivada de la función cosecante.
7. DERIVACION DE FUNCIONES INVERSAS: APLICACIONES.
    7.1. Derivada de la función inversa del seno.
    7.2. Derivada de la función inversa del coseno.

7.3. Derivada de la función inversa de la tangente.
7.4. Derivada de la función inversa de la cotangente.
8. COMPOSICION DE FUNCIONES Y DERIVADAS.
9. APLICACIONES FISICAS DE LA DERIVADA.
10. CUADRO RESUMEN DE DERIVADAS.
11. DERIVADAS SUCESIVAS.
11.1. Fórmula de Leibnitz.
12. TEOREMA DE ROLLE.
13. TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS.
14. FORMULA DE CAUCHY.
15. EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 38
DIFERENCIACION DE FUNCIONES **1245**
1. DEFINICION.
2. DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS.
3. PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL.
4. DIFERENCIALES SUCESIVAS.
5. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.
6. APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL.
6.1. Aplicación a máximos y mínimos.
6.2. Error absoluto de una función $y = f(x)$.
6.3. Diferencial logarítmica de la función. Error relativo.
7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 39
ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCION. EXTREMOS **1254**
1. FORMULA DE APROXIMACION DE TAYLOR.
2. FORMULA DE APROXIMACION DE MAC-LAURIN.
3. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.
3.1. Definición.
3.2. Criterios.
4. MAXIMOS Y MINIMOS.
4.1. Extremos absolutos y relativos
4.2. Discusión de máximos y mínimos.
4.3. Condiciones suficientes de máximo y mínimo.
4.4. Problemas.
5. APROXIMACION LINEAL. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.
6. REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES.
6.1. Intervalo de existencia.
6.2. Corte con los ejes.
6.3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6.4. Máximos y mínimos y puntos de inflexión.
6.5. Intervalos de concavidad y convexidad.
6.6. Asíntotas.
6.7. Representación gráfica de una función.
7. ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CURVA.
7.1. Ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto perteneciente a ella.
7.2. Ecuación de la tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella.
7.3. Tangente a la elipse en un punto de ella.
7.4. Tangente a la elipse desde un punto exterior a ella.
7.5. Ecuación de la tangente y la normal a una hipérbola en un punto.
7.6. Tangente a la hipérbola desde un punto exterior.
7.7. Ecuación de la tangente y de la normal a la parábola en un punto.
7.8. Tangente a la parábola desde un punto exterior.



viene de la página anterior

El 21 de noviembre de 1783, ante una ingente masa reunida en el parque de un castillo de París, Rozier y otro voluntario, el Marqués d'Arlandes, treparon a bordo de la nave circular cubierta de banderas situada en la base del globo. Se quitaron las cuerdas de amarre y el gran globo comenzó a elevarse.

Al principio, el globo se elevo lentamente y Rozier comenzó a alimentar el fuego con paja; el globo tomó altura más rápidamente pero al mismo tiempo aparecieron numerosas pequeñas lenguas de fuego en el habitáculo; los dos aeronáutas consiguieron dominar el fuego y el resto de la prueba fue una pura exaltación; el globo consiguió apenas subir por encima de los tejados más altos de París durante 25 minutos, antes de aterrizar felizmente cerca de 8 kilómetros de distancia. Por vez primera en la historia, el hombre efectuaba un vuelo verdadero.

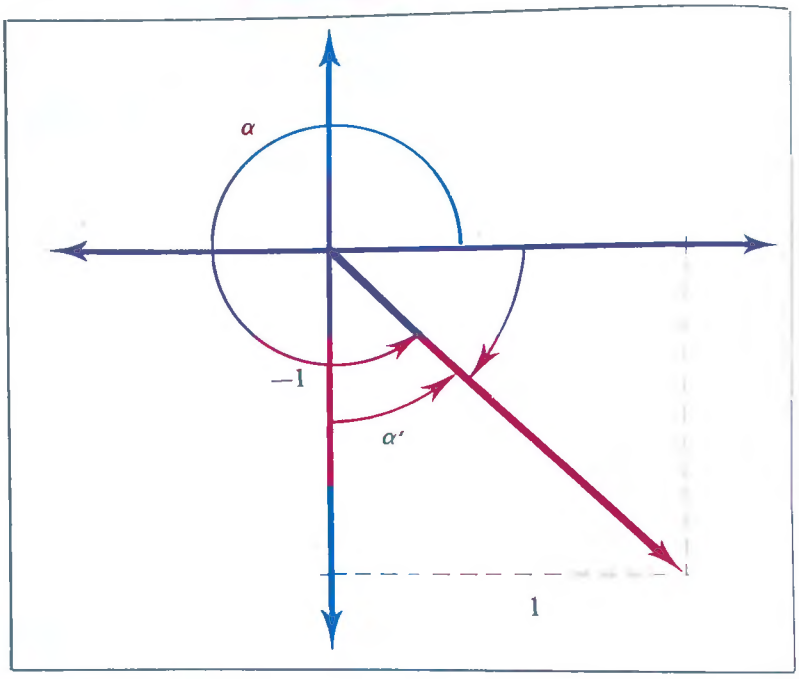
El segundo vuelo con equipaje humano llegó 10 días después de el de los Montgolfier. Esta vez, bajo el mismo cielo de París, cerca de 200.000 franceses aplaudían al físico Jacques Charles y un compañero suyo, que realizarían un vuelo que duró dos horas, en una distancia de 30 km., con un globo hinchado con hidrógeno. Aterrizaron sin problemas, pero

continúa en la página siguiente

Problema 8

Calcular en forma módulo-argumental y representar el complejo (1 — i).

Solución



$$\text{Módulo} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{2}$$

"Argumento" (α)

Para el cálculo del argumento (α), primeramente vamos a calcular el valor del ángulo α'

$$1 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha' \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizamos, quedando:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha' = \text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha' = 45^\circ$$

Si miramos la gráfica, se ve que:

$$\alpha = 270^\circ + \alpha' \; ; \; \alpha = 270^\circ + 45^\circ$$

Argumento: $\alpha = 315^\circ$

$$\sqrt{2}_{315^\circ}$$

Problema 9

Expresar en forma binómica y cartesiana y representar el producto de los complejos $6_{720°}$ y $2_{180°}$

Solución

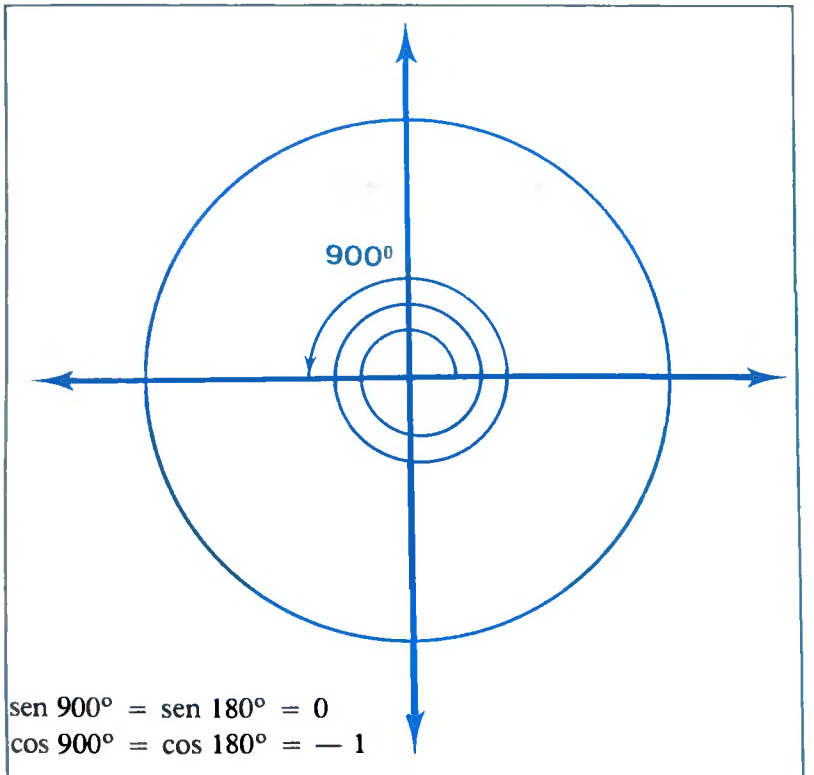
$$6_{720°} \cdot 2_{180°} = (6 : 2)_{720° + 180°} = 12_{900°}$$

$$= 12 (\cos 900° + \operatorname{sen} 900°\mathrm{i})$$

Ahora igual que en los casos anteriores, tenemos que calcular el valor del seno y coseno de 900°. Como ya se ve, un ángulo de 900° implica que ha dado más de una vuelta completa a la circunferencia, esto se calcula dividiendo por 360° (1 vuelta de circunferencia)

$$900° : 360° = 2 \text{ vueltas completas y de resto } 180°$$

$$900° = 2 \cdot 360° + 180° \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} 900° = \operatorname{sen} 180° \\ \cos 900° = \cos 180° \end{cases}$$



Sustituimos estos valores en la expresión trigonométrica, q dando

$$12_{900°} = 12 (\cos 900° + \operatorname{sen} 900°\mathrm{i}) = 12 (-1 + 0\mathrm{i}) =$$

$$= -12 + 0\mathrm{i} = (-12, 0)$$

viene de la página anterior

cuando el compañero de Charles salió de la plataforma, el globo, aligerado de peso, se alzó nuevamente con Charles a bordo y así, prácticamente sin desearlo, fue el primer hombre que realizó un vuelo solitario. Comenzaba a oscurecer y el globo subió a la altura récord de 3.000 m. Cuando regresó a tierra, Charles estaba tan conmovido que juró no poner jamás pie sobre un globo de nuevo.

No obstante la renuncia de Jacques Charles, la manía del vuelo se propagó por toda Europa. Inmediatamente surgió una hilera de profesionales de este nuevo deporte que efectuaban vuelos de exhibición, entre estos, un pequeño hombre delgadísimo realizó una ascensión en las grupas de un caballo sobre una plataforma suspendida del globo.

Como quiera que los globos estaban a merced del viento. Comenzó a sentirse la necesidad de algún tipo de propulsión. Se intentó con pagayas, remos y velas; incluso hubo quién teorizó con el empleo de pájaros uncidos. sin embargo, el verdadero vuelo controlado nació en 1852 del encuentro entre el globo y la máquina de vapor.

ARISTOTELES

FILOSOFO y matemático griego (384 a. de C. a 322 a. de C.), nació en Macedonia. Fue uno de los discípulos predilectos de Platón hasta la muerte de éste, en que abandonó la Academia Platónica e incluso la misma de Atenas. Marchó a Assos, donde vivió un tiempo y se casó. Posteriormente volvió a Atenas, donde le nombraron preceptor de Alejandro Magno. Allí fundo la escuela «PERIPATETICA», llamada asi porque las lecciones las daba paseando con sus discípulos. Lecciones de Filosofía, Sociologías, Sicología, Politica o Matemáticas.

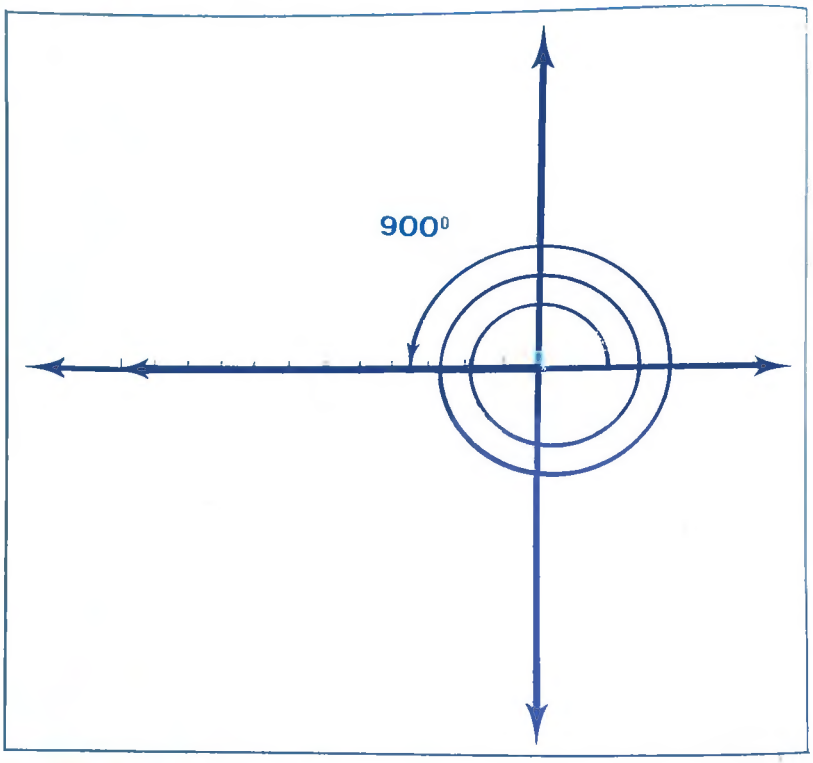
Se vio obligado nuevamente a abandonar Atenas a la muerte de su protector Alejando Magno, acusándole de impiedad. Se refugió en la isla de Eubea, donde murió, no sin antes fundar —o mejor continuar— la Academia, explicando lógica, metafísica y realismo.

Explicó el silogismo como arma de discusión, partiendo de la definición hasta llegar a su demostración. A través de esta doctrina se llegó a la dialéctica o ciencia del futuro.

Las obras que nos iego gozan de fama universal. Han servido como origen o principio de multitud de obras, tanto antiguas como de actualidad. Obras: «FISICA», «DE CIELO», «MECANICA», «METAFISICA», «LA RETORICA», «LA POETICA» y la «POLITICA».

Expresión binómica ⇒ $(-12 + 0i)$

Expresión cartesiana ⇒ $(-12, 0)$



Problema 10

Encontrar el complejo resultante de dividir $(2 - \sqrt{3}i)$ entre $(\sqrt{3}\,i)$, expresándolo en forma binómica y cartesiana y representándolo.

Solución

$\frac{2 - \sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}\,i}$, hay que recordar que para dividir tenemos que actuar de la misma forma que cuando racionalizamos, por tanto tendremos:

$$\frac{(2 - \sqrt{3}\,i) \cdot (\sqrt{3}\,i)}{\sqrt{3}\,i \cdot \sqrt{3}\,i} = \frac{2\sqrt{3}\,i - 3\,i^2}{3\,i^2}$$

Como $i^2 = -1$, nos queda:

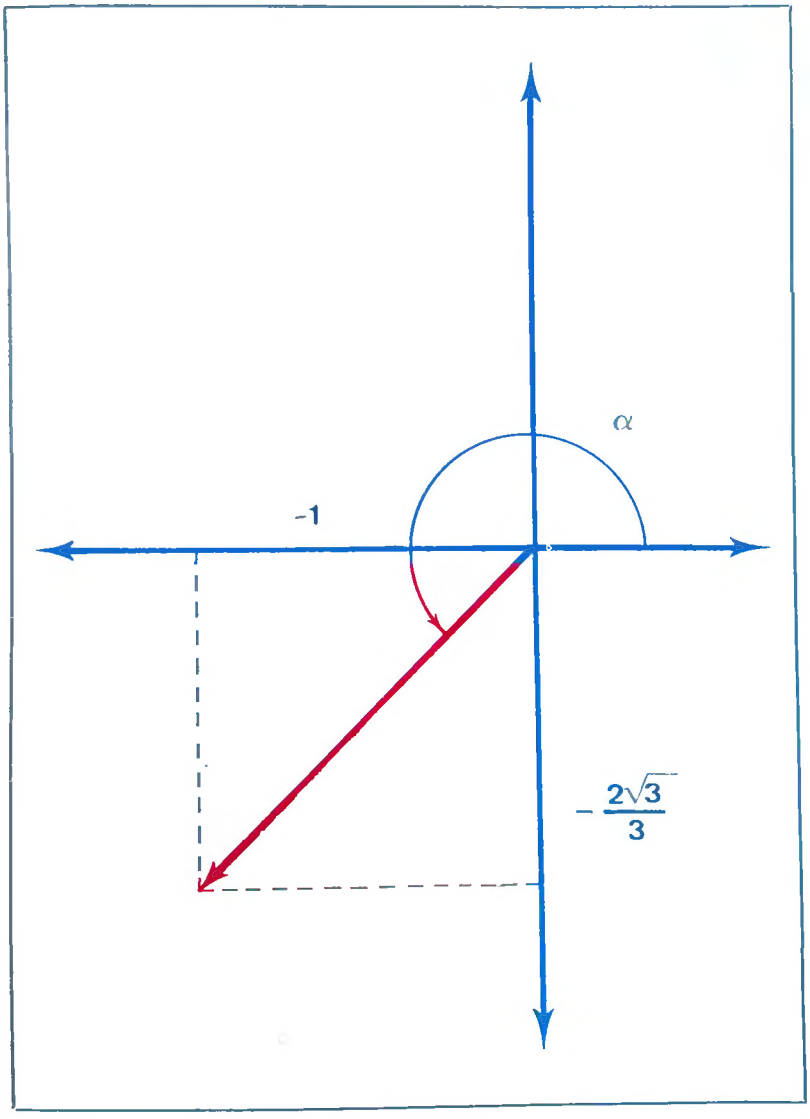
$$\frac{2\sqrt{3}\,i + 3}{-3}$$

Si variamos el orden para colocar primero la parte real y luego la imaginaria, quedará

$$\frac{3}{-3}+\frac{2\sqrt{3}i}{-3}=-1-\frac{2\sqrt{3}}{3}i=\left(-1,\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Expresión binómica $= -1-\frac{2\sqrt{3}}{3}i$

Expresión cartesiana $=\left(-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$



MULTIPLICACION EGIPCIA

Los egipcios tenían un particular sistema de multiplicación en columna que consitía en poner el mayor factor y seguido de su sus dobles, en la otra columna se ponía la mitad y sus dobles. La operación terminaba al llegar al doble inferior al segundo factor; se marcaban los dobles cuya suma componía el factor y se sumaban los términos correspondientes de la primera columna siendo esta suma el resultado de la operación. Veamos con un ejemplo:

Queremos hallar el producto de 28×21.
Formamos las columnas de dobles

*	1	28
	2	26
*	4	116
	8	224
*	16	448

Como el siguiente doble sería 32, superior a 21, ya podemos con las dos columnas conocer 28×21.

21 sería igual a 16 + 4 + 1 con lo cual sumando los números de la columna de la derecha que corresponden a 16, 4 y 1 tenemos 448 + 112 + 28 = 588 según los antiguos métodos de los egipcios.

PROBLEMA DEL MESOLABIO

El rey Minos mandó construir una tumba para su hijo Glauco, sin embargo una vez que el proyecto estuvo realizado le pareció pequeña por lo que mandó que duplicaran sus lados, pero conservando siempre la forma cúbica. Sin embargo al duplicar los lados la figura plana se cuadruplica mientras que si tiene forma cúbica se octuplica. Surgió el problema de cómo podía duplicarse una figura como un cubo. Hipócrates de Quios fue el que dedujo que si entre dos rectas una doble que la otra, se insertan dos medias proporcionales se duplicará el cubo. Su razonamiento fue el siguiente: si los volúmenes de cuatro cubos están en progresión geométrica de razón 2, el cuarto cubo tiene el lado doble que el primero mientras que el segundo cubo es de volumen doble del primero, al estar los cubos en progresión geométrica, lo están sus lados, es decir al intercalar dos medias entre dos segmentos, uno doble del otro, la primera de las medias resolvería el problema que fue conocido como «problema del mesolabio».

Problema 11

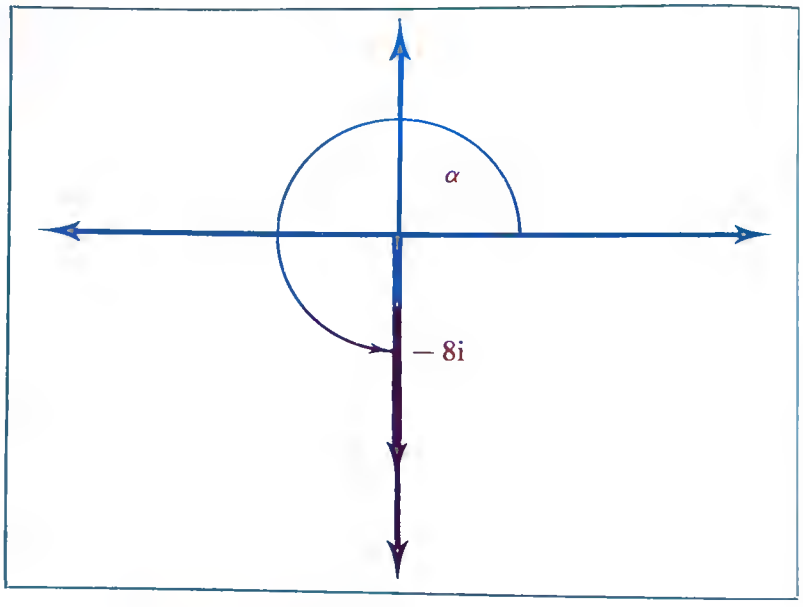
Calcular las tres raices cúbicas del complejo (— 8i)

Solución

El problema nos pide resolver esta raíz:

$$\sqrt[3]{-\,8i}$$

para encontrar la solución es necesario transformar este complejo en la forma polar. Para una mejor comprensión realizamos la representación gráfica (— 8i)



Como — 8i = (0 — 8i), el módulo será

"Módulo" $\quad m = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{64} = 8$

"Argumento" $\quad \alpha = 270^0$

Por tanto $\Rightarrow \; -8i = 8_{270^\circ}$

luego sobre 8_{270° se calculan las tres raices

$$\sqrt[3]{8_{270^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{270^\circ + 2k\pi}{3}} \text{ ; ver que } \sqrt[3]{8} = 2$$

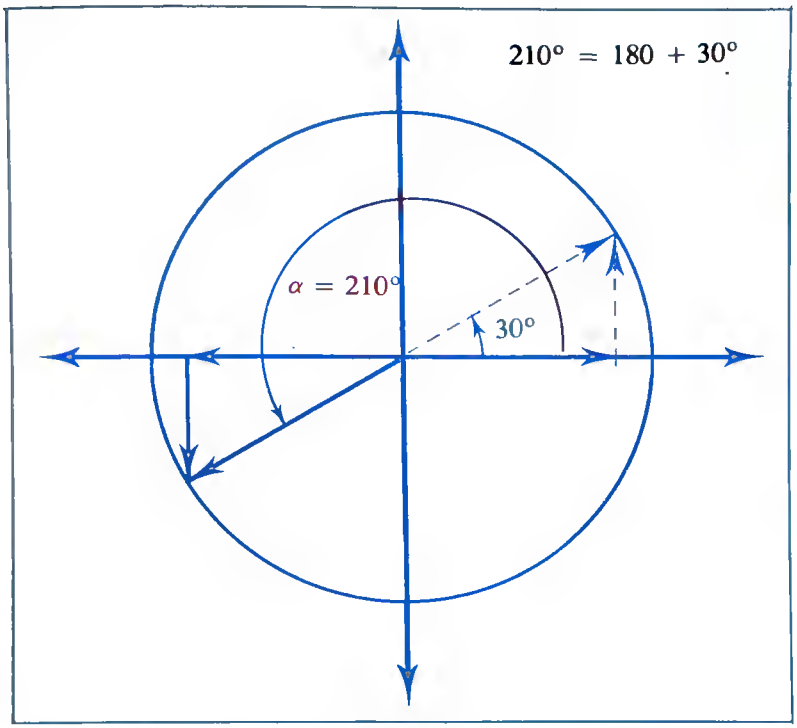
Para k = 0

$$2_{\frac{270^\circ + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}} = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + \operatorname{sen} 90i) = 2(0 + i) = 2i$$

Para k = 1

$$2_{\frac{270° + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}} = 2_{210} = 2(\cos 210° + \operatorname{sen} 210°\mathrm{i})$$

Ahora tenemos que calcular el valor del seno y coseno del ángulo de 210°.



Mirando la gráfica, se ve claramente que:

$$\operatorname{seno} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituimos estos valores en la expresión trigonométrica:

$$2(\cos 210° + \operatorname{sen} 210°\mathrm{i}) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) =$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2}\,\mathrm{i} = \boxed{(-\sqrt{3} - \mathrm{i})}$$

Para k = 2

$$2_{\frac{270° + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}} = 2_{\frac{270° + 720°}{3}} = 2_{330°} = 2(\cos 330° + \operatorname{sen} 330°)$$

Para calcular el valor del seno y coseno de 330°, hacemos lo mismo que en el caso anterior.

ZENON DE ELEA

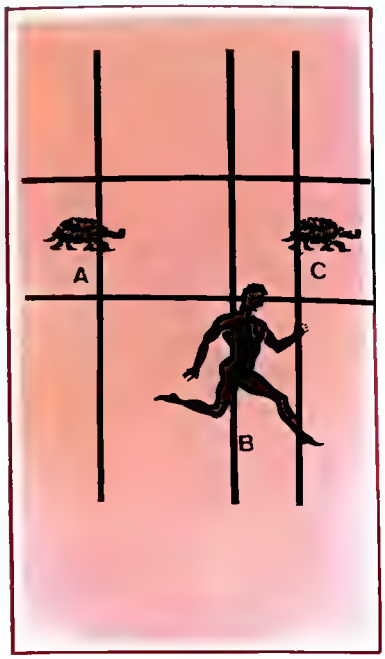
NACIO en Grecia, en Elea, de ahí su denominación, en el año 490 a. de J.C. y murió torturado por orden del tirano Diógenes Laercio.

Según muy antiguos testimonios se le considera discípulo de Parménides, aunque últimamente estudios sobre dicho personaje hacen pensar que esta relación fuera poco importante; si bien, es verdad que los argumentos de Zenón para demostrar la imposibilidad del movimiento y la multiplicidad parece que defiendan la teoría de Parménides.

Es famóso el argumento de Aquiles para demostrar la imposibilidad del movimiento: Aquiles no puede alcanzar nunca a una tortuga si ésta le lleva alguna ventaja, por poca que sea; porque para alcanzarla, Aquiles debería llegar primeramente al punto en que ella estaba cuando él empezó a correr, luego al que, mientras él proseguía su carrera, hubiese llegado ya la tortuga, y así sucesivamente hasta el infinito. Es, por tanto, imposible que el más lento sea alcanzado por el más rápido, y, en términos generales, es imposible alcanzar un fin cualquiera; luego el movimiento no puede darse.

Dicho sofisma se basa en esta tesis: un espacio dado no puede ser recorrido si no lo son todas sus partes, lo cual es imposible, ya que las partes son infinitas en número.

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

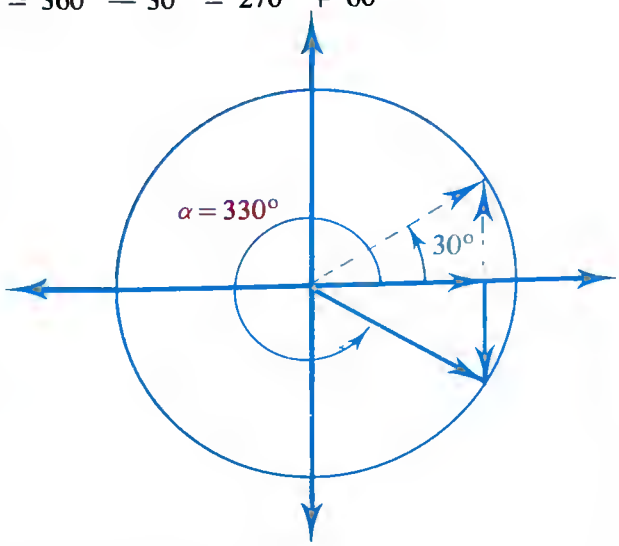
Aristóteles, quien le llamó «padre de la dialéctica», contestó a Zenón que si el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles «en potencia», sin embargo no pueden ser infinitamente divididos «en acto» y que la esencia del movimiento es «franquear el límite», ser la identidad entre un lugar y otro lugar, así como el devenir tiene por esencia ser la identidad entre el ser y el no ser, entre lo mismo y lo otro.

La dialéctica de Zenón fue principalmente de carácter negativo y sus argumentos contra la multiplicidad demuestran que de admitirlos se siguen consecuencias contradictorias. Sus refutaciones tenían como fin criticar la doctrina pitagórica del número como principio de la realidad.

El estudio de las paradojas de Zenón ha sido muy importante en la investigación lógica, tanto antes como en la actualidad.

Destacan sus obras: ***DE LA NATURALEZA, Comentarios a los Escritos da Empédoclas, Disputas y Contra los Filósofos.***

$330° = 360° - 30° = 270° + 60°$



Mirando la figura, se ve que:

$$\operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si sustituimos estos valores en la expresión trigonométrica tendremos:

$$2(\cos 330° + \operatorname{sen} 330\mathrm{i}) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2}\mathrm{i} = (\sqrt{3} - \mathrm{i})$$

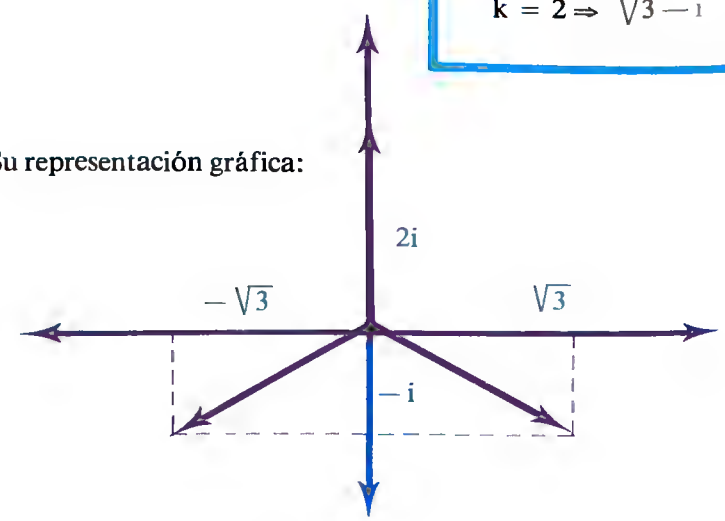
Resumiendo las tres raices serán:

$k = 0 \Rightarrow 2\mathrm{i}$

$k = 1 \Rightarrow -\sqrt{3} - \mathrm{i}$

$k = 2 \Rightarrow \sqrt{3} - \mathrm{i}$

Su representación gráfica:

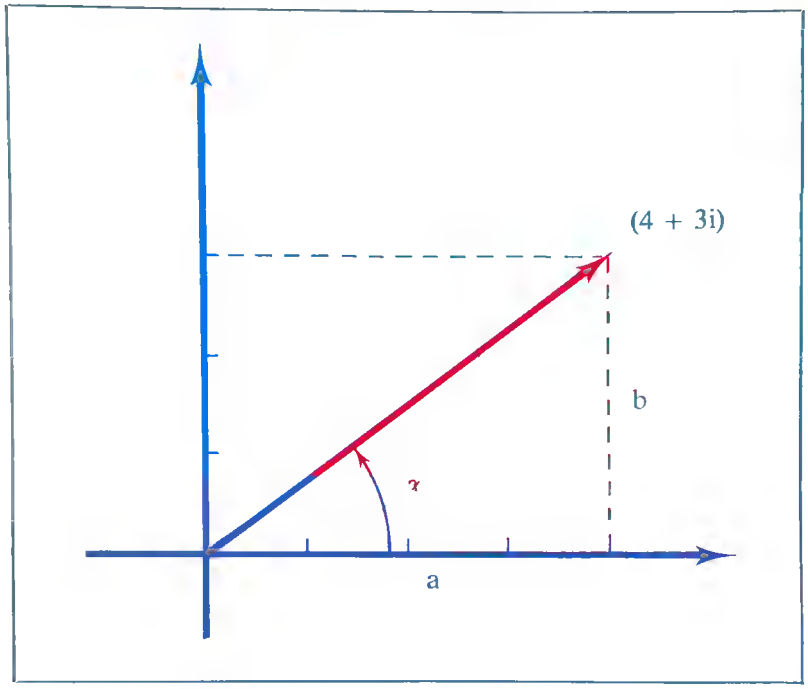


Problema 12

Representa gráficamente el número complejo (4 + 3i) y pon dicho número en forma factorial (forma trigonométrica)

Solución

Para representarlo trazamos los ejes:



Para ponerlo en forma factorial sabemos:

$$m = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

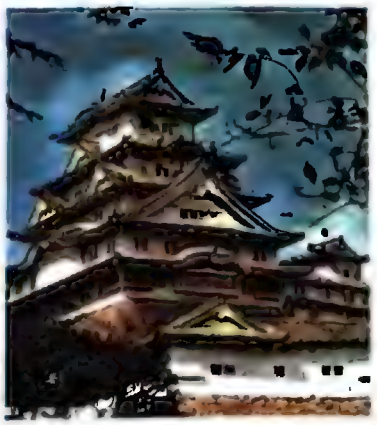
y que al ángulo α es:

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{4}{3} = \text{arc tg } 1{,}3333$$

$$\alpha = 53°8'$$

En forma factorial tendremos:

$$5(\cos 53° 8' + i \operatorname{sen} 53° 8')$$



MATEMATICAS CHINAS

Los primeros documentos de los matemáticos chinos datan del siglo III a. de C. y en ellos se revela una matemática con un nivel de conocimientos semejantes al resto de los pueblos orientales: un sistema aditivo de numeración mediante varillas de bambú, el empleo del ábaco, fórmulas aproximadas de cálculo de áreas y volúmenes y los inmemoriales cuadrados mágicos.

El siglo III Liu Hui compone unos problemas matemáticos empleando nociones de álgebra. En la Edad Media aparece un importante matemático chino Ch'in-Shao que escribió las nueve secciones de matemática que ya contiene ecuaciones algebraicas de grado superior. En este tratado se distinguen los coeficientes positivos con color rojo y los negativos con color negro, y hay un método numérico para resolución de ecuaciones que coincide con el método de Ruffini.

En el siglo XIII Yang Kui quien en su Análisis de las reglas aritméticas hace conocer la expresión de la suma de los primeros *n* números triangulares como la que sigue:

$$1 + 3 + 6 \ldots + \frac{1}{2} n (n + 1) = \frac{n (n + 1) (n + 2)}{6}$$

En el siglo XIV Chun-Shih expone nuestro «triángulo aritmético» hasta la novena línea. Ya que en el siglo XVI, los misioneros jesuitas introducen la matemática occidental en Extremo Oriente.

ARITMETICA ARABE

La construcción de la cultura y ciencia árabes a la sociedad occidental es innegable como lo demuestran no ya su arte o su literatura sino extensos y detallados tratados técnicos y científicos.

Nuestro sistema de numeración decimal se lo debemos a ellos aunque ciertamente modificado, ya que antes del siglo IX ellos utilizaban palabras o letras griegas para expresar unidades decenas y centenas.

Fue la escuela de Bagdad la que introdujo el sistema número adoptará un valor distinto según donde se halle situada.

El auténtico iniciador del desarrollo matemático en el mundo árabe fue Al-Juwarizumi que recogió en una obra la numeración india del 1 al 9 incluyendo el cero y otras operaciones aritméticas de interés.

La difusión de la obra fue notable aunque no puede evitar la inercia característica la sociedad científica de la época para cambiar el viejo sistema de numeración griega.

Problema 13

Representar gráficamente el complejo

$$3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$

Solución

Para representarlo primero tengo que ponerlo en forma binómica (a + bi)

$$a = m \cos \alpha = 3 \cdot \cos 30° = 3 \cdot 0{,}8660$$

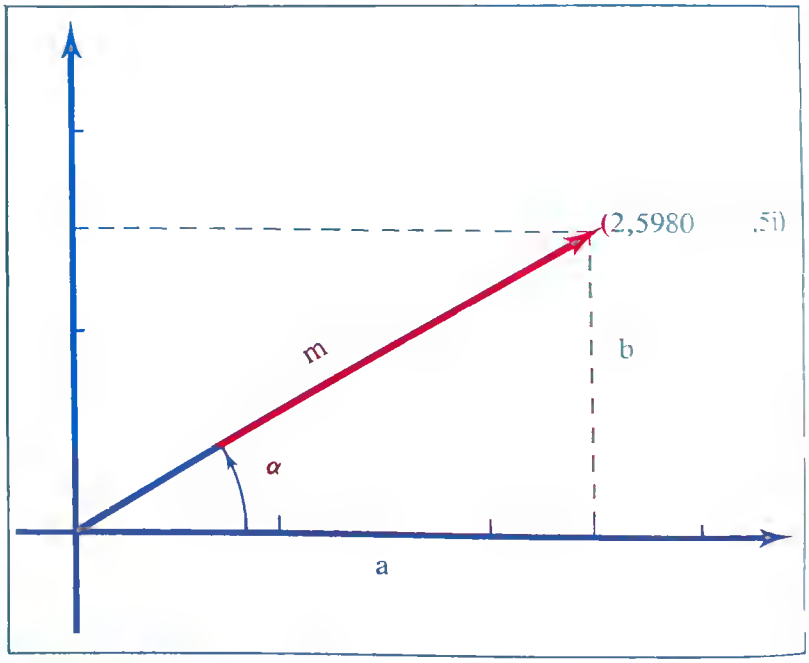
$$a = 2{,}5980$$

$$b = m \operatorname{sen} \alpha = 3 \cdot \operatorname{sen} 30° = 3 \cdot 0{,}5$$

$$b = 1{,}5$$

Su forma binómica será $\boxed{(2{,}5980 + 1{,}5i)}$

Su representación gráfica será:



Problema 14

Calcular las 4 raices cuartas del complejo (— 81)

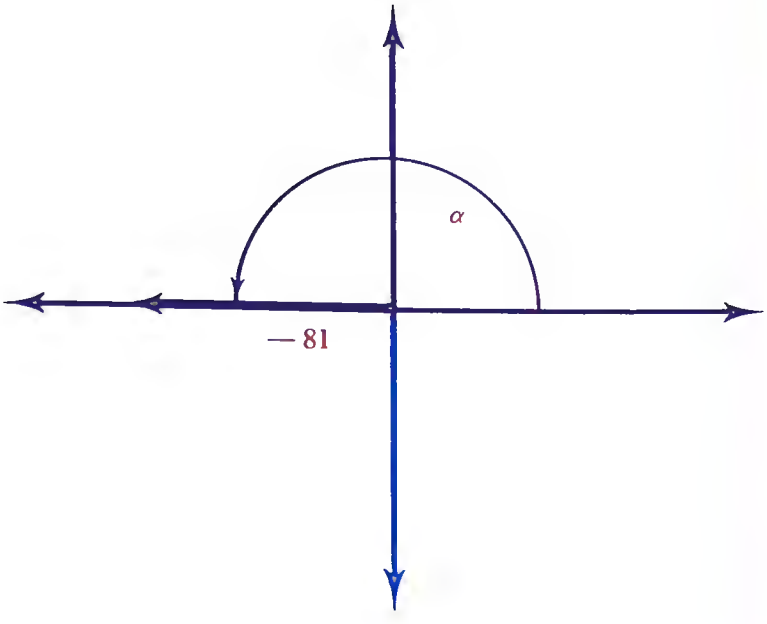
Solución

Tendremos que resolver

$$\sqrt[4]{-81}$$

para encontrar la solución, es necesario transformar este complejo (— 81 = — 81 + 0i) en la forma polar.

Realizamos la representación gráfica de (— 81)



módulo: 81
argumento: π

Así pues, es sobre el valor $81_{180°}$ sobre el que se calculan las cuatro raíces

$$\sqrt[4]{-81}\ 3\ \sqrt[4]{81_{\pi}} = \sqrt[4]{(\sqrt{81})_{\frac{\pi+2K_{\pi}}{4}}}$$

$$\text{Módulo } \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

Argumento.

para K = 0

$$3_{\frac{\pi+2.0.\pi}{4}} = 3_{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}i\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

para K = 1

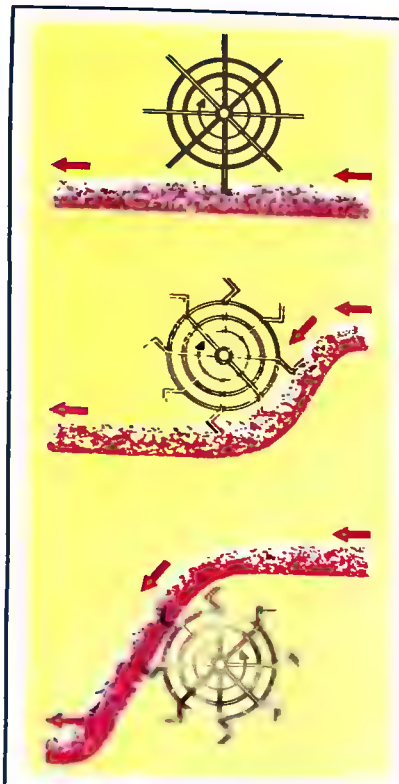
$$3_{\frac{\pi+2.1\pi}{4}} = 3_{\frac{3\pi}{4}} = \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

para k = 2

$$3_{\frac{\pi+2.2\pi}{4}} = 3_{\frac{5\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

LA HUMEDAD POR EL CABELLO

Tras los numerosos tipos de higómetros ideados por Leonardo da Vinci, Horacio Bénédict de Saussure inventó este higrómetro de pelo, que aprovecha la propiedad del cabello humano de absorver el vapor y, por tanto, consiente la mediación de la humedad atmosférica. El índice inferior registra estas variaciones en el pelo, que se alarga con tiempo húmedo.



TRES RUEDAS:
Tres modos de aprovechar el agua corriente

— La rueda por encima.

El agua corriente pasa por debajo de la rueda, topa con las palas y provoca el movimiento. El sentido de la corriente (flechas horizontales) hace girar la rueda en sentido antihorario.

— La rueda en el flanco

La rueda, dispuesta en modo de encontrar el agua corriente en un punto mediano, está dotada de baldes fijados en las palas. El peso del agua sobre los baldes acelera la rotación.

— La rueda por debajo

El agua cae desde arriba sobre la rueda que aprovecha el empleo de baldes aplicados en las palas y, al igual que la rueda de flanco, adquiere velocidad con tal sistema.

Para k = 3

$$\frac{3\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} = 3\,\frac{7\pi}{4}$$

Resumiendo estas 4 raices serán:

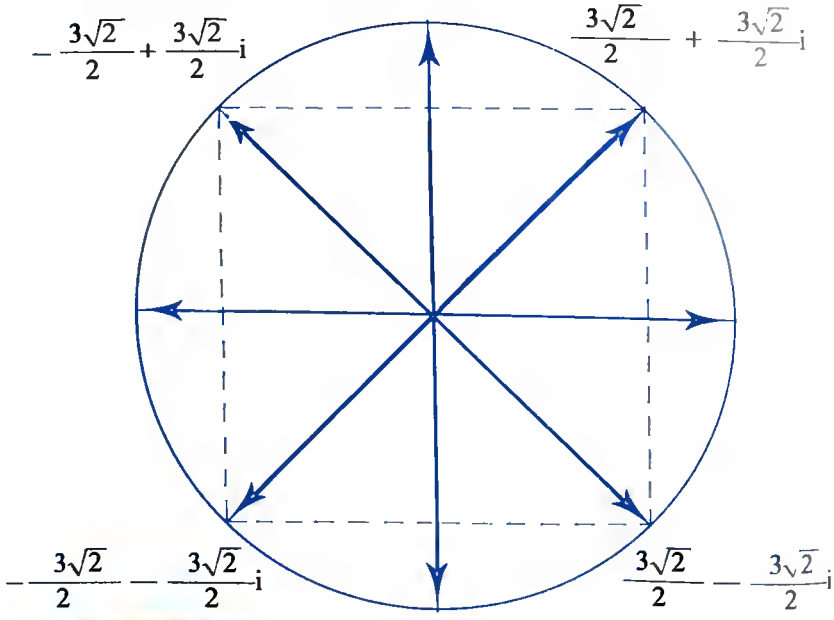
$$k = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 3 \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

Su representación gráfica será:



Problema 14

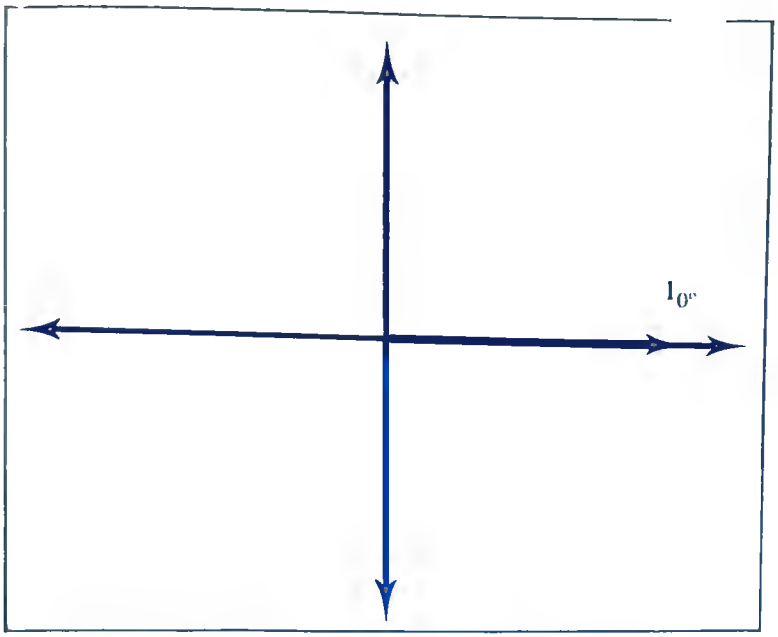
Resolver la ecuación $x^6 - 1 = 0$, obteniendo las 6 raices.

Solución

$$x^6 - 1 = 0 \Rightarrow x^6 = 1$$

Por tanto

$$x = \sqrt[6]{1}$$



Así pues, viendo la gráfica, claramente se detecta que

$$1 = 1 + 0i = 1_{0^\circ}$$

luego:

$$x = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1 + 0i} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}}$$

Ahora se hace el ejercicio exactamente igual que los problemas anteriores. Nótese que $\sqrt[6]{1} = 1$

Para k = 0

$$\frac{1_{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}}{6} = 1_{0^\circ}$$

Para k = 1

$$\frac{1_{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}}{6} = 1_{\frac{\pi}{3}}$$

Para k = 2

$$\frac{1_{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}}{6} = 1_{\frac{2\pi}{3}}$$

Para k = 3

$$\frac{1_{0 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}}{6} = 1_{\pi}$$

Para k = 4

$$\frac{1_{0 + 2 \cdot 4 \cdot \pi}}{6} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

Para k = 5

$$\frac{1_{0 + 2 \cdot 5 \cdot \pi}}{6} = 1_{\frac{5\pi}{3}}$$

La inclinación típicamente romana hacia lo colosal se evidencia en esta reconstrucción de los molinos construidos en Barbegal (Francia), para aprovechar la energía hidráulica a gran escala. El mecanismo se componía de dos series de ocho ruedas cada una situadas en diferentes niveles de altura. Dispuestas entre las dos filas de ruedas se encontraban 16 series de ruedas de molino movidas cada una por su rueda respectiva.

UN BAROMETRO DIAGONAL

Versión modificada del instrumento de Torricelli, este barómetro de 1753 tiene la parte superior de la columna de mercurio inclinada casi horizontalmente. En esta posición las variaciones de la presión atmosférica se leen más fácilmente porque el mercurio se mueve más con los cambios de presión.

EUDOXO DE CNIDO

FILOSOFO, matemático y astrónomo griego (nació en Cnido en el año 406 a. de C.). Sus primeros estudios fueron encaminados (y por medio de unos legajos egipcios) a un conocimiento más exacto del año, al que fijó 365 días, más ¼ de día. Este estudio fue adaptado más adelante en el calendario juliano.

En Filosofía estudió la relación y participación de las cosas con las ideas. Como las ideas de las cosas le parecían demasiado abstractas, reconoció que las propiedades que tienen los cuerpos se reconocían por la mezcla de las sustancias en asociación directa con las ideas.

En Matemáticas estudió el axioma de Arquímedes: «Dados dos segmentos o dos números, existe siempre un múltiplo entero del menor que comprende al mayor».

En astronomía bien puede llamársele el padre de esta materia, ya que sus estudios sobre las *Esferas homocéntricas* es el verdadero origen de la Astronomia tradicional. Esta es, sitúa a la tierra como inmóvil y al universo en movimiento. Cada planeta estaba ligado a las esferas homocéntricas y todos con el mismo centro, el centro de la tierra. A la luna y al sol les fijó tres esferas a cada uno y cuatro esferas para cada uno de los demás planetas (cinco). Cada sistema era totalmente independiente de los otros, sin embargo las esferas de cada planeta actuaban en conjunto.

Así pues, resumiendo tenemos:

$$(x_0)\ k = 0 \Rightarrow 1$$

$$(x_1)\ k = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(x_2)\ k = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(x_3)\ k = 3 \Rightarrow -1$$

$$(x_4)\ k = 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(x_5)\ k = 5 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Problema 15

Hallar la transformada del complejo z definida por:

$$w = \frac{4}{(z+1)^2}, \text{ con } |z| = 1$$

Solución:

Sea $z = e^{i\alpha}$

Por tanto $w = \dfrac{4}{(e^{i\alpha} + 1)^2} = \dfrac{4 \cdot e^{-i\alpha}}{(e^{i\alpha/2} + e^{-i\alpha/2})^2} =$

$$\frac{\cos\alpha - i\,\text{sen}\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = u + vi$$

Por tanto: $u = \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$,, $v = -\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

verificándose: $\sqrt{u^2 + v^2} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; de donde se deduce:

$$u = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{u^2 + v^2}\left(\frac{2}{\sqrt{u^2+v^2}} - 1\right) = 2 - \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Es decir la transformada es $u^2 + v^2 = (u - 2)^2$

o sea $v^2 + 4u - 4 = 0$ que es la ecuación de una parábola.

Problema 16

Hallar la transformada de $t = r \cdot e^{-i\theta}$, definida por

$$z = t + \frac{1}{t}$$

1º) Al variar θ, siendo r constante.

2º) Al variar r, siendo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

1º) Se verifica: $z = x + yi = t + \frac{1}{t} = r \cdot e^{-i\theta} + \frac{1}{r} e^{i\theta}$, y teniendo en cuenta que: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$,, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$, resulta:

$$x + yi = r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow$$

$$x = (r + \frac{1}{r}) \cos\theta,\ y = (\frac{1}{r} - r) \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{por tanto: } \cos^2\theta = \frac{x^2 r^2}{(1 + r^2)^2}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{y^2 r^2}{(r^2 - 1)^2} \text{ luego: } \boxed{\frac{x^2 r^2}{(1 + r^2)^2} + \frac{y^2 r^2}{(r^2 - 1)^2} = 1}$$

que es la ecuación de una elipse de semiejes

$$a = \frac{1 + r^2}{r},\ b = \frac{r^2 - 1}{r}$$

2º) si $\theta = \frac{\pi}{4}$: $x = \frac{r^2 + 1}{r} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{1 - r^2}{r} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$,

por tanto: $x + y = \frac{1}{r}\sqrt{2}$, $\quad x - y = r\sqrt{2}$, resultando

$\boxed{x^2 - y^2 = 2}$ que es la ecuación de una hipérbola equilatera.

Problema 17

El afijo del complejo Z permanece en la región limitada por el triángulo de vértices (1, 0), (1, 1) y (0, 1). Definir y dibujar la región en que se halla el afijo de $W = Z^2$.

Solución

Sea $z = x + yi$, $W = \alpha + \beta i$

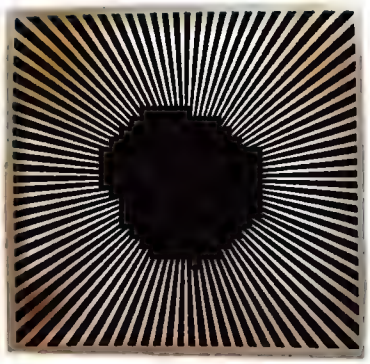
$$w = z^2$$

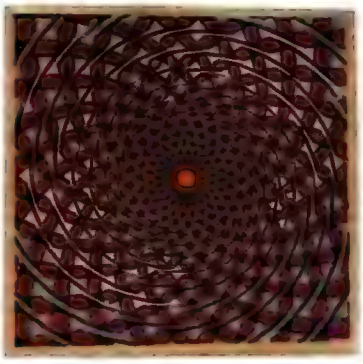
se verifica: $\alpha + \beta i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\text{Por tanto: } \left.\begin{array}{l} \alpha = x^2 - y^2 \\ \beta = 2xy \end{array}\right\}$$

INSTRUMENTOS PARA LA CREACION DE UNA NUEVA CIENCIA

La palabra «meteorología» ahonda sus raíces al menos en el siglo IV a.J.C. cuando Aristóteles escribió una obra sobre el tiempo titulada *Meteorología* (literalmente «discurso sobre la atmósfera»). Pero fue sólo hace 400 años que comenzaron a desarrollarse los instrumentos fundamentales adecuados para transformar el estudio del tiempo en la ciencia meteorológica. El excelente experimentador que fue Galileo Galilei, buscando un sistema para medir los cambios de temperatura, inventó el termómetro, alrededor del 1600. Cincuenta años después, un discípulo suyo, Evangelista Torricelli, inventó el barómetro. Muchos años más tarde aparece el simple higómetro de pelo de Salussure para medir la humedad. Instrumentos registradores de la lluvia y veletas fueron continuamente mejorados por hombres como Sir Christopher Wren, arquitecto inglés. En 1790 la colección fundamental de instrumentos —el equipo instrumental que ha servido para las observaciones meteorológicas standard en suelo desde entonces— estaba prácticamente completa.





IMAGENES DESFASADAS PERO INSISTENTES

El hombre decide ver las cosas a su modo: ora con imaginación, ora con lógica y a veces erróneamente. Frente a un agolparse de líneas semejantes como en las ruedas, o bien en la estrella, percibimos un movimiento ilusorio. La disposición de círculos repletos que hemos estampado sobre las ruedas conduce a una interpretación lógica, aunque errada, según que el círculo circundado de aros sea más pequeño que el otro, circundado por aros más grandes. A menu-

continúa en la página siguiente

Aplicando esta transformación a los lados del triángulo tendremos:

$$\text{x = 1:}\quad \left.\begin{matrix}\alpha - 1 = -y^2\\ \beta = 2y\end{matrix}\right\} \; y = \frac{\beta}{2},, \frac{\beta^2}{4} = 1 - \alpha,, \boxed{\alpha = 1 - \frac{\beta^2}{4}}$$

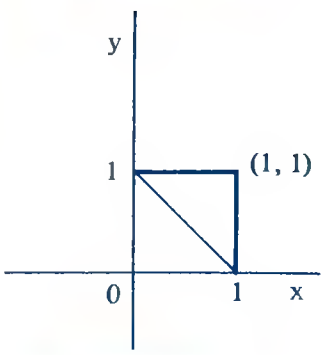
$$\text{y = 1:}\quad \left.\begin{matrix}\alpha + 1 = x^2\\ \beta = 2x\end{matrix}\right\} \; x = \frac{\beta}{2},, \frac{\beta^2}{4} = 1 + \alpha,, \boxed{\alpha = -1 + \frac{\beta^2}{4}}$$

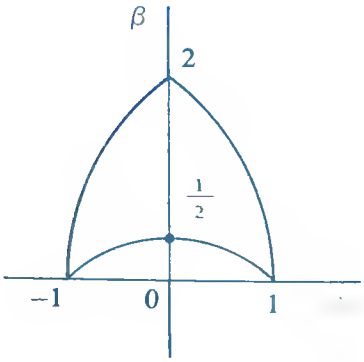
$$\text{x + y = 1:}\quad \left\{\begin{matrix}\alpha = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x)^2 = x^2 - 1 - x^2 + 2x\\ \beta = 2xy = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2\end{matrix}\right.$$

$$x = \frac{\alpha + 1}{2}$$

y sustituyendo en $\boxed{\beta = \alpha + 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)}$

Gráficamente se tiene:





Problema 18

Determinar el conjunto de imágenes de los números complejos Z, tales que el número u = (1 — z)(1 — iz) sea: a) real, b) imaginario puro, y representarlo.

Solución

Sea z = x + iy, se verifica:

$$u = (1 - z)(1 - iz) = 1 - (1 + i)z + iz^2 =$$

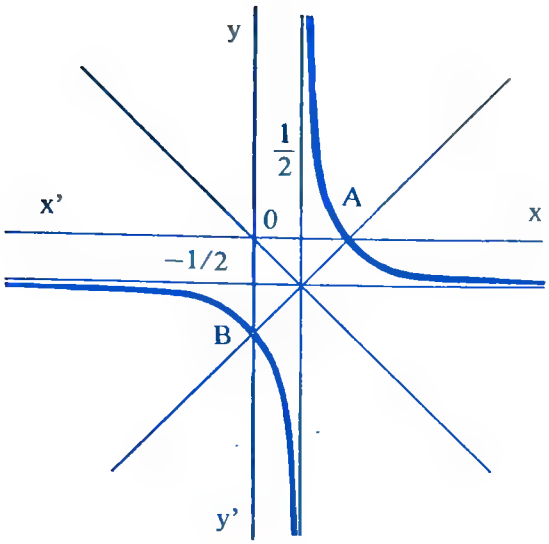
$$= 1 - (1 + i)(x + iy) + i(x + iy)^2 = 1 - (x + ix + iy - i) +$$

$$+ i(x^2 - y^2 + 2ixy), \text{ o sea: } u = (1 - x + y - 2xy) + i(x^2 - y^2 - x - y).$$

1º) El número u es real si, y solo si, $x^2 - y^2 - x - y = 0$ o lo que es lo mismo si $(x + y)(x - y - 1) = 0$, es decir que el conjunto buscado esta formado por la segunda bisectriz de los ejes y

por la recta que une los puntos A(1, 0) y B(0, —1) que es paralela a la primera bisectriz.

2°) El número u es imaginario puro si $1 - x + y - 2xy = 0$, o sea:



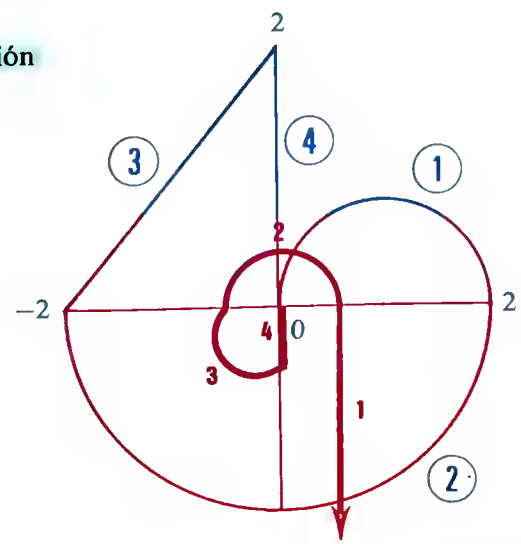
$y = \dfrac{1 - x}{2x - 1}$ que es una hipérbola que pasa por A y por B (vértices de la hipérbola) y de asíntotas $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{1}{2}$.

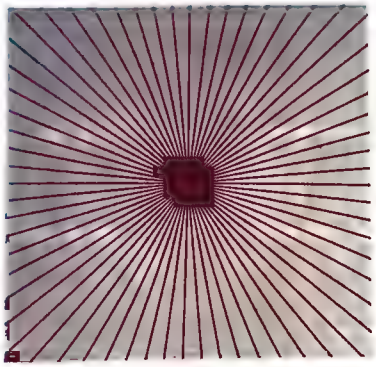
Problema 19

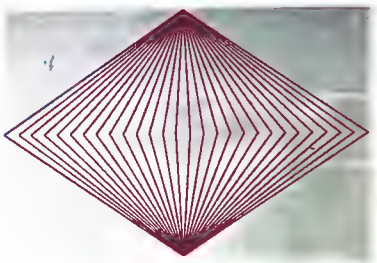
Sea la figura formada por: 1°) El arco de curva $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y \geq 0$.— 2°) El arco de curva $x^2 + y^2 = 4$, $y \leq 0$.— 3°) El segmento de recta $y - x = 2$ entre el punto (—2, 0) y el punto (0, 2).— 4°) El segmento de recta $x = 0$ comprendido entre el punto (0, 2) y el punto (0, 0). Hallar la figura transformada según la función inversa

$$w = \frac{1}{z}$$

Solución

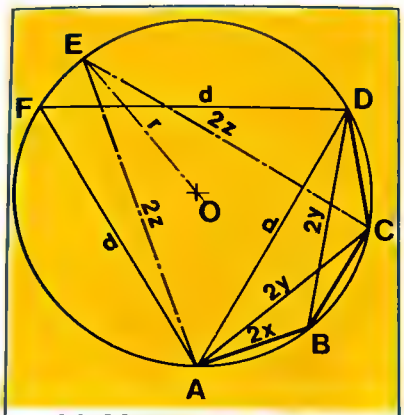






viene de la página anterior

do, la percepción es engañada por un insólito fondo. Las dos parejas de paralelas que son intersecadas por un fondo de semirectas con diferente angulación, de las que las más centrales inciden casi a 90°. Aquellas de los extremos son las que más lejos se encuentran de incidir en ángulo recto y, en aquellos puntos, las líneas blancas parecen plegarse a una relación más perpendicular con las incidentes. En fin, a causa de un fondo espiral de cuadros, la mente se obstina en ver círculos concéntricos, como si, en cambio, se tratasen de una espiral.



LA CONSTRUCCION DEL ENEAGONO DE BOMBELLI

Bombelli es un ilustre algebrista italiano del siglo XVI que trata de exponer cómo la geometría va asociándose cada vez más al álgebra de modo que resuelve problemas geométricos con ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, nace así el «cálculo gráfico».

Tenemos un caso de asociación álgebra-geometría: suponemos una circunferencia de radio r donde trazamos 3 de los lados de un eneágono inscrito:
$AB = BC = CD = 2x$ donde además:

$$AC = BD = 2y$$

AC es uno de los lados del triángulo ACE siendo sus restantes lados:

$$AE = CE = 2Z$$

Llamaremos l al lado AD del triángulo equilátero ADF. Observando les relaciones entre todos los segmentos que hemos definido en función de las relaciones geométricas:

$$2x^2 + 2z^2 = 2r^2$$

Considerando ahora ABCD y ABCE

$y^2 = lx + r^2$
$xz = ry$

Con este sistema de ecuaciones llegemos a la ecuación:

$$x^3 + \frac{1}{3}l^3 = L^2x$$

Bambelli tomo $2a = 6$ de forma que la ecuación se convierte en:

$$X^3 - 36x - 72 = 0$$

que él no pudo resolver.

Ecuaciones de la transformación:

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$,, $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$, por tanto:

1º) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y \geq 0$, se transforma en:

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{2u}{u^2+v^2} = 0,, (u^2 + v^2)(1 - 2u) = 0$$

es decir se transforma en la recta $2u - 1 = 0$ entre $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, -\infty)$

2º) $x^2 + y^2 = 4$, $y \leq 0$, se transforma en: $\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2} = 4$ o sea $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$, circunferencia de centro (0, 0) y radio 1/2 con $v \geq 0$ por ser $y \leq 0$.

3º) $y - x = 2$. Se transforma en: $u^2 + v^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 0$, es decir, en una circunferencia de centro $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ y radio $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ con $v \leq 0$ y $u \leq 0$.

4º) $x = 0$ se transforma en $u = 0$, entre $v = 0$ y $v = -\frac{1}{2}$;

Problema 20

Hallar la curva que describe el afijo de z cuando $|w| = 2$ sabiendo que $z = w + 2w^{-1}$

Solución

$$z = u + vi;\ w = x + yi,$$

$$u + vi = (x + yi) + \frac{2}{(x+yi)} = (x + yi) + \frac{2(x-yi)}{x^2+y^2}$$

$$|w| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \qquad u + vi = (x + yi) + (\frac{x}{2} - \frac{y}{2}i)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{3x}{2} \\ v = y/2 \end{array}\right\} \quad 3v = \frac{3y}{2}; \quad \left.\begin{array}{l} u^2 = (\frac{3}{2}x)^2 \\ 9v^2 = (\frac{3}{2}y)^2 \end{array}\right\} \quad u^2 + 9v^2 =$$

$$= (\frac{3}{2})^2 (x^2 + y^2) \quad \text{y como } x^2 + y^2 = 4$$

$$u^2 + 9v^2 = 9$$

Problema 21

Si el afijo de z describe en el plano la recta de ecuación $x + y = 1$ y se tiene que $w = \frac{z+1}{z-1}$, determinar el lugar que describe el afijo de w.

Solución

Se verifica: $wz - w = z + 1$, $z = \dfrac{w+1}{w-1}$ y llamando

$z = x + yi$, $w = u + vi$

$$x + yi = \frac{u+vi+1}{u+vi-1} = \frac{(u+1+vi)(u-1-vi)}{(u-1)^2+v^2} = \frac{u^2-1+v^2+i(-2v)}{u^2+v^2-2u+1}$$

por tanto: $x = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2-2u+1}$,, $y = \dfrac{-2v}{u^2+v^2-2u+1}$

y sustituyendo en la ecuación dada:

$$\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2-2u+1} + \frac{-2v}{u^2+v^2-2u+1} = 1,,$$

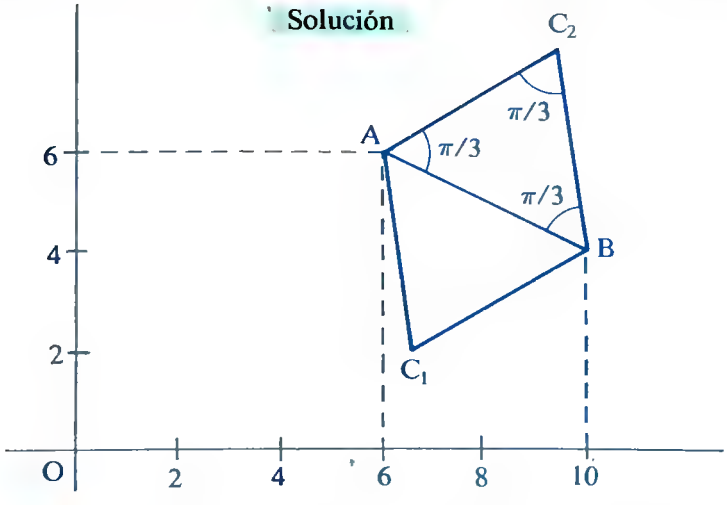
$$u^2+v^2-2v-1 = u^2+v^2-2u+1$$

o sea: $\boxed{u - v = 1}$ es una recta

Problema 22

Hallar los números complejos cuyos afijos determinan con el segmento definido por A(6, 5) y B(10, 4) un triángulo equilatero.

Solución



$$OC_2 = OA + AC_2 = OA + AB(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) =$$

$$= 6 + 5i + (4 - i)\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 6 + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

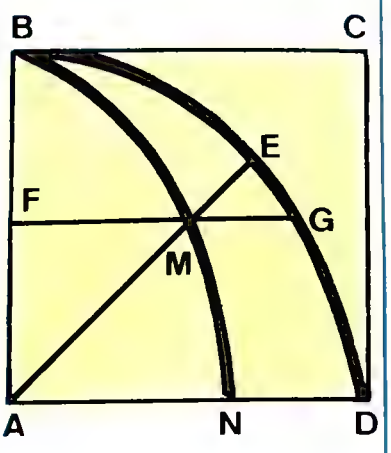
$$+ i\left[5 + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right] = \boxed{8 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{9}{2} + 2\sqrt{3}\right)}$$

$$OC_1 = OB + BC_1 = OB + BA(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$$

$$= 10 + 4i + (-4 + i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 10 - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \boxed{8 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{3}\right)}$$



CUADRATRIZ DE HIPIAS

La cuadratriz de Hipias es la primera curva construida a través de puntos. Tenemos un segmento AB que gira alrededor de A con movimiento uniforme, al mismo tiempo el segmento BC se traslada, de manera que ambos segmentos coinciden en AD. Tenemos que en cada instante la intersección de AE y FG, posiciones de los segmentos móviles, determinan un punto M de la cuadratriz BMN siendo la cuadratriz la parte de la curva comprendida en el cuadrante BAD.

El ángulo BAE es proporcional al segmento BF, esta curva nos permite dividir un ángulo en un número cualquiera de partes iguales, sin más que dividir el segmento proporcional en ese número de partes.

TEMA 33

TOPOLOGIA DE LA RECTA. ESPACIOS TOPOLOGICOS

INDICE

1.—DEFINICION DE RECTA REAL.
2.—RECTA REAL AMPLIADA.
3.—VALOR ABSOLUTO. PROPIEDADES.
4.—EL ORDEN DE LA RECTA REAL.
5.—INTERVALOS DE LA RECTA REAL.
6.—POSTULADO DE CANTOR.
7.—ENTORNO DE UN PUNTO.
8.—CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.
9.—PUNTOS DE UN CONJUNTO LINEAL.
9.1.—Punto de acumulación. Teorema.
9.2.—Punto interior.
9.3.—Punto aislado.
9.4.—Punto adherente.
10.—CLASIFICACION DE LOS CONJUNTOS LINEALES.
11.—CONJUNTOS ACOTADOS. TEOREMA.
12.—TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS.
13.—TEOREMA DE BOREL-LE GUE. COMPACIDAD.
14.—ESPACIO TOPOLOGICO.
15.—ENTORNOS. PROPIEDADES.
16.—PUNTO DE ACUMULACION.
17.—PUNTO ADHERENTE.
18.—OPERADOR CLAUSURA.
19.—PUNTO AISLADO.
20.—PUNTO INTERIOR.
21.—PUNTO EXTERIOR.
22.—PUNTO FRONTERA. PROPIEDADES.
23.—FILTROS Y LIMITES.
24.—BASE DE FILTRO - FILTROS CONVERGENTES.
25.—PUNTO ADHERENTE A UNA BASE DE FILTRO.
26.—BOLA ABIERTA.
27.—BOLA CERRADA.
28.—EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 33

TOPOLOGIA DE LA RECTA. ESPACIOS TOPOLOGICOS

1.—DEFINICION DE RECTA REAL.

Se define como un conjunto innumerable e infinito de números que constituyen un cuerpo ordenado y completo. Constituye un cuerpo por ser una terna de un conjunto con dos operaciones que verifica las siguientes propiedades:

- Es un anillo.
- Es conmutativo
- Unitario
- Dominio
- $\forall\, a \in R - \{0\}, \exists \quad b = a^{-1}/a \,.\, a^{-1} = 1$

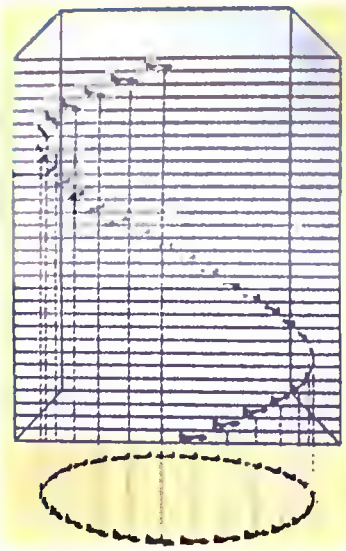
2.—RECTA REAL AMPLIADA.

Se llama recta real ampliada o completada y se representa por $\overline{R}$ al conjunto $\overline{R} = \{R\} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ verificando que $\forall\, x \in R$, $\{-\infty\} < x < \{+\infty\}$. La recta real ampliada ya no es un cuerpo, pues definimos las operaciones siguientes respecto a la suma:

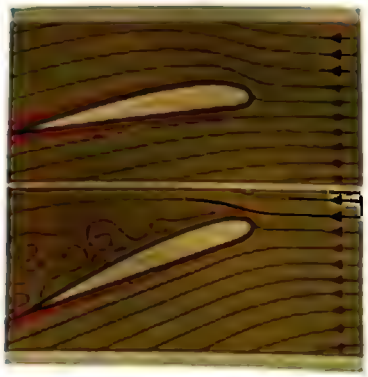
$$x + \{+\infty\} = \{+\infty\} + x = \{+\infty\}$$

$$x - \{+\infty\} = \{-\infty\}$$

$$x - \{-\infty\} = \{+\infty\}$$



El concepto einsteiniano del tiempo como cuarta dimensión, esencialmente equivalente a longitud, anchura y profundidad, se ilustra aquí en forma simplificada. El recorrido de un avión que vuela en redondo, fotografiado a intervalos de un minuto (abajo) posee dimensiones de longitud y anchura. Pero si se disponen las fotos en orden ascendente (arriba), puede percibirse la dimensión tiempo. Se ha establecido así una relación entre las fotos y los intervalos en los que han sido tomadas. La marcha resultante de sacacorchos revela lo que los físicos llaman continuo tridimensional y representa el movimiento del avión a través del espacio y del tiempo. Aquí, se ha omitido la dimensión profundidad.



La naturaleza del flujo de aire sobre el ala es consecuencia de la viscosidad del aire. El primer estrato se adhiere efectivamente al ala, y no se mueve de hecho; el segundo frotando contra el primero, se mueve poco sobre ese; el tercero se mueve algo más rápidamente, siguiendo la curvatura del ala. Así, estrato tras estrato, en el flujo se establece un campo de velocidad que va desde cero hasta el valor de la velocidad del aire libre. Cuando un ala está en las condiciones de bache, todos estos hilos de aire sucesivos, que forman el denominado estrato límite, pierden su agarre sobre la superficie si rompen creando turbulencia.

$$\{+\infty\} + \{+\infty\} = \{+\infty\}$$

$$\{-\infty\} + \{-\infty\} = \{-\infty\}$$

$$\{-\infty\} - \{+\infty\} = \{-\infty\}$$

pero no podemos calcular:

$$\{+\infty\} - \{+\infty\}$$

Por otra parte para el producto: definimos las operaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\{+\infty\} = \{+\infty\}x = \{+\infty\} \\ x\{-\infty\} = \{-\infty\}x = \{-\infty\} \end{array}\right\} \forall\ x > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x\{+\infty\} = \{+\infty\}x = \{-\infty\} \\ x\{-\infty\} = \{-\infty\}x = \{+\infty\} \end{array}\right\} \forall\ x < 0$$

$$\{+\infty\}\{+\infty\} = \{+\infty\}$$

$$\{+\infty\}.\{-\infty\} = \{-\infty\}\{+\infty\} = \{-\infty\}$$

El orden en la recta ampliada es total. Los entornos que aparecen en la recta ampliada son los siguientes:

$$[-\infty, b),\ [-\infty, b],\ R = [-\infty, \infty],\ (a, \infty],\ [a, \infty]$$

3.—VALOR ABSOLUTO. PROPIEDADES.

Sea x un número real $x \in R$, definimos el valor absoluto de x como sigue:

$$\begin{array}{ll} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{array}$$

El valor absoluto de un número real x viene representado por la notación: $|x|$.

Propiedades del valor absoluto

1. $|a| = |-a|$. El valor absoluto de a no depende de su signo.

Para demostrarlo consideremos todos los casos posibles:

- si $a = 0$ entonces:

$$|0| = 0 = |-0|$$

- si $a > 0$

$$|a| = a = -(-a) = |-a|$$

pues $-a < 0$ y entonces $|-a| = -(-a)$

- Por último si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

y como $-a > 0 \Rightarrow |-a| = -(-a)$ } de donde $|-a| = |a|$

2. El valor absoluto del producto es el producto de valores absolutos:

$$|a \cdot b| = |a||b|$$

Hay que analizar todos los casos posibles:

- Si ambos números reales son positivos $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} |a| = a \\ |b| = b \end{array}\right\} |a| \cdot |b| = a \cdot b = |a \cdot b|$$

- Si uno de ellos es negativo: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ sabemos que $a \cdot b < 0$

entonces: $|a \cdot b| = a \cdot (-b)$

$$\left.\begin{array}{l} |a| = a \\ |b| = -b \end{array}\right\} |a| \cdot |b| = a \cdot (-b) = |a \cdot b|$$

$$\Big\} |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

- si ambos son negativos: $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b > 0$

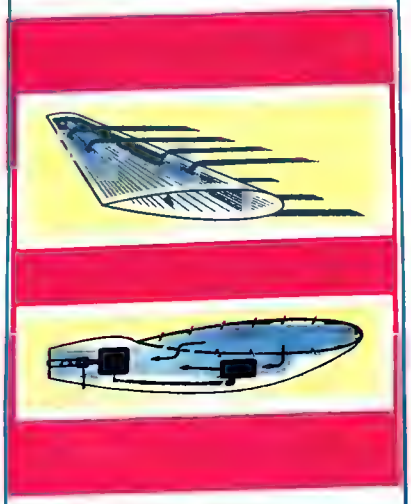
el valor absoluto del producto de ambos será:

$$|a \cdot b| = (-a) \cdot (-b)$$

$$\left.\begin{array}{l} |a| = -a \\ |b| = -b \end{array}\right\} |a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b)$$

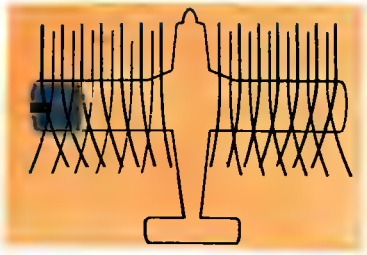
Entonces se demuestra que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ también en este caso.

- En el caso de que uno de ellos o ambos sean nulos el producto será cero.



CONTROL DEL FLUJO LAMINAR

El control del flujo laminar, una técnica experimental para reducir la resistencia aerodinámica debida al frotamiento del aire contra la superficie de las alas, se ensayó con éxito pro vez primera en 1963. Se construyó un ala especial provista de numerosas fisuras a través de toda su longitud (arriba), tratada con dos bombas situadas por debajo y accionadas por una turbina (abajo). Apenas las capas cercanas a las superficies de las alas se hacen turbulentas, el aire es absorbido a través de las fisuras de las bombas y fluye hacia la parte posterior.



Los remolinos en las extremidades de las alas producen una parte de la resistencia inducida que limita el rendimiento aerodinámico. Cuando el ala de un avión se mueve en el aire (arriba) se forma sobre esa un flujo de baja presión que se repliega hacia el interior (líneas negras), y bajo la misma un flujo inclinado hacia el exterior (líneas azules). El flujo dirigido hacia fuera se enrolla hacia la punta del ala y sobre el borde y, puesto en rotación en forma de estela vortiginosa por el movimiento hacia adelante del ala, absorbe parte del flujo superior. La energía empleada en la creación de este remolino es una parte del insuprimible precio a pagar para obtener capacidad de vuelo.

EN LA GALERIA DEL VIENTO

Esta fotografía, usando la técnica schilieren, ha sido disparada en una galería de viento, donde puede recreerse con precisión las condiciones de vuelo (modelo). El aire (azul) pasa junto al modelo en miniatura de un aeroplano a la velocidad de 1,4 Mach, creando ondas de choque en diferentes puntos del avión.

3. Dado un número real $c > 0$: $|a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$

Tenemos que demostrar:

a) $-a \leq c$

b) $-c \leq a$

a) En este caso basta con aplicar la definición del valor absoluto:

$$\left.\begin{array}{l} |a| \leq c \\ |a| = a \end{array}\right\} a \leq c$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a = -a \leq c \\ a \geq -c \end{array}\right\} \Rightarrow -c \leq a \leq c$$

4. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Para $a > 0$: $$\left.\begin{array}{l} -|a| = -a \\ |a| = a \end{array}\right\} -a \leq a \leq a$$

luego $-|a| \leq a \leq |a|$.

- Para $a < 0$

$$\left.\begin{array}{l} -|a| = -(-a) = a \\ |a| = -a \end{array}\right\} -|a| \leq a \leq |a|$$

5. El valor absoluto de la suma de números reales es menor o igual a la suma de los valores absolutos de dichos números:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

- si $\begin{cases} a > 0 & |a| = a \\ b > 0 & |b| = b \end{cases} \Rightarrow |a + b| = a + b \leq |a| + |b|$

- si $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$

$b \leq 0 \leq a$

$b \leq 0 \leq -b$ $\quad \begin{cases} b + a \leq -b + a = |b| + |a| \\ -a - b \leq a - b = |b| + |a| \end{cases}$

$-a \leq 0 \leq a$

luego $|a + b| = \begin{cases} a + b, \text{ si } a + b \geq 0 \\ -a - b, \text{ si } a + b < 0 \end{cases}$

y por tanto $|a + b| \leq |a| + |b|$

6. Si $a \neq 0$ $|a \cdot a^{-1}| = 1 = |a| \cdot |a^{-1}|$

y por tanto $|a^{-1}| = |a|^{-1}$

7. $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

4.—EL ORDEN DE LA RECTA REAL.

Decimos que un conjunto A está ordenado cuando en él se ha definido una relación de orden.

Dentro del conjunto de los números reales R se define la relación binaria.

$$a \leq b \qquad \exists\, x \in R^+ \cup \{0\} \text{ tal que } a + x = b$$

Esta relación es de orden total ya que si a y b son elèmentos de R se tiene $a \leq b$ ó $b \leq a$.

5.—INTERVALOS DE LA RECTA REAL.

Definimos en la recta real como *intervalo abierto* de extremos a y b y designado como (a, b) al conjunto de los números reales mayores que a y menores que b.

$$(a, b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$$

● *Intervalo cerrado* de extremos a y b y designado por [a, b] al conjunto de números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

$$[a, b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$$

● *Intervalo semiabierto* de extremos a y b y designado por (a, b] ó [a, b) al conjunto de números reales comprendidos entre los dos extremos y que contiene solamente a uno de ellos.

Así

$$(a, b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in R/\, a \leq x < b\}$$

● *Intervalos encajados*

Se llaman intervalos encajados a la sucesión de intervalos

$$I_1 = [a_1, b_1] \qquad I_2 = [a_2, b_2] \ldots I_n = [a_n, b_n]$$

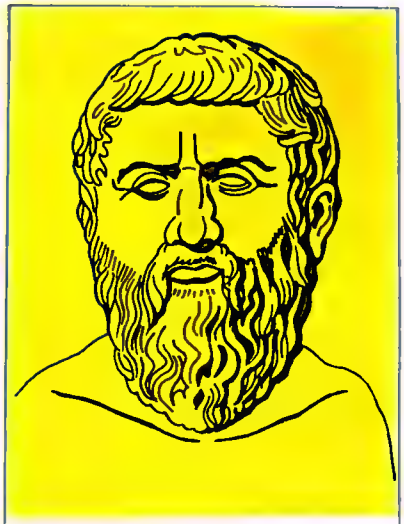
$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots \supset I_n$$

6.—POSTULADO DE CANTOR.

Una sucesión de intervalos encajados donde la sucesión formada por las amplitudes de cada uno de ellos $b_n - a_n$ tiende a cero, define un único punto que pertence a todos los intervalos de la sucesión.

7.—ENTORNO DE UN PUNTO.

Se llama *entorno simétrico* del punto x_o y radio δ y se denota



PLATON

NACIO en Atenas el año 427 a. de C. y murió el 347 a. de C. Filósofo, Literato y Matemático griego, nació bajo el imperio de Pericles, de una familia de la más antigua aristocracia de Grecia; fue hombre inquieto y todo su afán se cifraba en el conocimiento. Discípulo y seguidor de la filosofía Socrática, fue seguidor también y alumno del más importante matemático de aquella época: Teodoro. Siguió las doctrinas Pitagóricas sobre los números; sus sistemas y sus representaciones. Platón encarna todas las órdenes del saber humano: desde la Sociología a la Política: desde la Sicología a la Ontología, y desde la Filosofía a las Matemáticas.

Las obras que nos legó Platón fueron numerosas e importantes, si bien unas son de él y otras solamente atribuidas a él.

Así, por ejemplo, en el «EPISTEME» estudia el conocimiento Universal. En «LA PAIDEIA» trata la educación y formación del hombre hasta alcanzar la perfección; dirigirlo, formarlo tanto en el valor intelectual como en el moral.

Son célebres sus «DIALOGOS». Entre ellos los de más renombre son: «CRITON», «PROTAGORAS», «FEDON», «REPUBLICA», «TINEO», «POLITICO», «FILEBO» y «LEYES».

por $E(x_o, \delta)$ al conjunto de números reales mayores que $x_o - \delta$ y menores que $x_o + \delta$

$$E(x_o, \delta) = \{x \in R / x_o - \delta < x < x_o + \delta\} =$$

$$= (x_o - \delta, x_o + \delta)$$

$$E(x_o, \delta) = \{x \in R / \ |x - x_o| < \delta\}$$

Entorno reducido

Representamos por $E^*(x_o, \delta)$ al entorno reducido del punto x_o y radio δ que se define como el conjunto de todos los puntos del entorno $E(x_o, \delta)$ exceptuando el punto x_o

$$E^*(x_o, \delta) = E(x_o - \delta) - \{x_o\}$$

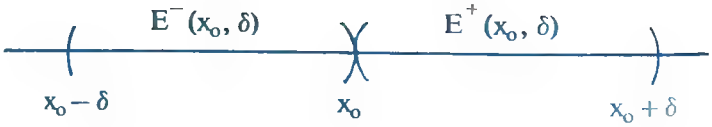
Entorno a la derecha

Representamos por $E^+(x_o, \delta)$ al entorno a la derecha del punto x_o y radio δ que se define como el conjunto de todos los números reales mayores que x_o y menores que $x_o + \delta$

Entorno a la izquierda

Representamos por $E^-(x_o, \delta)$ al entorno a la izquierda del punto x_o y radio δ que definimos como el conjunto de todos los números reales mayores que $x_o - \delta$ y menores que x_o.

La representación gráfica de ambos es:



8.—CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.

Sea A un subconjunto de la recta real R. Decimos que x_o es un punto interior del subconjunto A si existe un entorno $E[x_o, \delta)$ del punto x_o totalmente contenido en A.

$$x_o \text{ punto interior de } A \iff \exists \ E(x_o, \delta) \subset A$$

Un subconjunto de A de R decimos que es un conjunto abierto cuando todos sus puntos son interiores.

A abierto $\iff \forall x \in A$, x es un punto interior.

Decimos que un subconjunto A de R es un conjunto cerrado cuando el conjunto complementario A^c es un conjunto abierto

$$A \text{ cerrado} \iff A^c \text{ abierto.}$$

LA SEMANA ERA NECESARIA

La vida de una comunidad se desarrolla en modo más armonico si se fija un determinado día para cada actividad específica, como el lavado, la compra, el reposo y la plegaria. Antiguamente, los Griegos dividían el mes en tres semanas de diez días; y los Romanos tenían una semana laborable de ocho días seguida de un día da fiesta y reposo. Entre las tribus primitivas de hoy en día, la semana laboral varía, en cuanto a duración, de cuatro a diez días. Cosa curiosa: entre estas sociedades es prácticamente desconocida la semana de siete días —la única que no está en vigor entre ellos. En las mayores naciones del mundo sin embargo, la semana de siete días constituye la regla general. Esta medida fue recogida del *Génesis* —«y el séptimo día Dios descanso»— y se propagó por casi todo el mundo en virtud de la difusión del cristianismo y del islamismo. Cada intento de cambiar en el mundo occidental la semana de siete días ha fallado siempre. En 1792 la Convención revolucionaria francesa astableció un calendario decimal que raquería semanas de diez días. Aunque era funcional, sin embargo fue abandonado cuando Napolaón llegó al poder. En este siglo la Unión Soviética ha intentado dos veces alterar la semana, fijando una semana de cinco días en 1929 y una de seis en 1932. En 1940 antró de nuevo en vigor la semana de siete días.

9.—PUNTOS DE UN CONJUNTO LINEAL.

9.1.—Punto de acumulación. Teorema.

Sea A un subconjunto de la recta real R y x_0 un número real que puede pertenecer o no al conjunto A, decimos que x_0 es un punto de acumulación de A cuanto todo entorno reducido de x_0 contiene puntos de A.

x_0 punto de acumulación $\Longleftrightarrow \forall E^*(x_0, \delta), E^*(x_0, \delta) \cap A \neq \varnothing$

Teorema

Cualquier entorno de un punto de acumulación contiene infinitos puntos del conjunto A.

En efecto si existiera un entorno reducido de x_0 que solo tuviera un número finito de puntos de A, habría uno de ellos que distaría de x_0 una distancia menor que los demás (ϵ), en el entorno $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ no habría puntos de A, luego x_0 no sería punto de acumulación.

La condición necesaria y suficiente para que A subconjunto de R sea un conjunto cerrado es que contenga a todos sus puntos de acumulación.

Condición necesaria — Si suponemos A es un conjunto cerrado y x_0 es punto de acumulación de A. Si $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in A^c$ siendo A^c abierto y x_0 un punto interior de $A^c \Rightarrow \exists\, E(x_0, \delta)$ contenido en A lo que contradice la hipótesis de que todos los entornos reducidos de x_0 tienen algún punto común con A, luego $x_0 \in A$.

La condición es suficiente. Si A contiene todos los puntos de acumulación $\Rightarrow$ que es un conjunto cerrado y existiría un punto x_0 de A^c que no es interior a A^c, ningún entorno de x_0 está totalmente contenido en A^c

$$\nexists\, E(x_0, \delta) \subset A^c \Longleftrightarrow \forall\, E(x_0, \delta)\, E(x_0, \delta) \cap A \neq \varnothing$$

todos los entornos del punto x_0, $E(x_0, \delta)$ tienen puntos de A, luego x_0 es un punto de acumulación de A luego $x_0 \in A$ y contradice la hipótesis de que $x_0 \in A^c$.

El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivado de A y se representa por A'

9.2.—Punto interior.

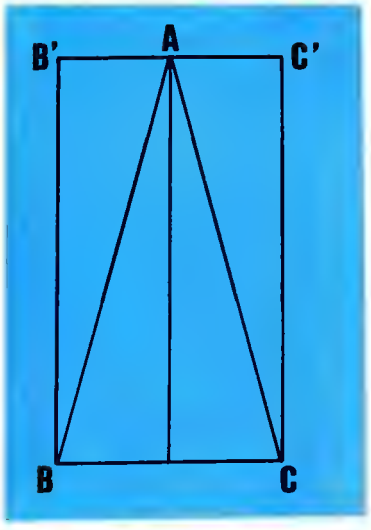
como hemos dicho en el punto 8.

Decimos que x_0 es un punto interior de A, si existe un entorno de x_0 tal que todos sus puntos pertenecen a A.

El conjunto de puntos interiores de A se llama interior de A y se representa por $\mathring{A}$.

9.3.—Punto aislado.

Se dice que x_0 es un punto aislado de A, si existe un entorno reducido de x_0 cuyos puntos no pertenecen a A.



El cálculo del área de un triángulo fue un problema geométrico muy tratado por los egipcios y cuya reducción se presta a diversas interpretaciones.

Los ascribas del Imperio Medio utilizaban la palabra meryt para designar la altura según puede interpretarse en varios problemas, pero los expertos opinan que significa en realidad lado.

Esto plantea un problema de base de cálculo por ejemplo en el problema:

«Ejemplo del cálculo de un campo triangular. Si te dicen: un triángulo de diez unidades de meryt y cuatro de base; cuál es su superficie? La calcularás asi:

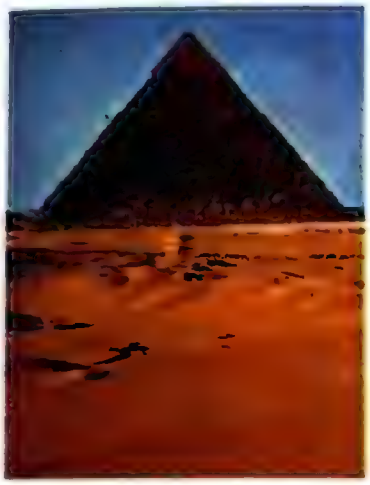
Tomarás la mitad de 4, o sea 2, para hacer su rectángulo.

Multiplicarás 10 por 2. Esta es su áraa».

La respuesta es 2.000 Khâ.

La brevísima exposición del problema no aclara si meryt hace referencia a la altura o a un lado; siendo un cálculo erróneo de ser cierto lo último.

Una explicación alternativa consiste en suponer que empleaban un método gráfico para la reducción tal y como indica la figura.



NUMERO DE ORO

Se llama número de oro en matemáticas a aquel que verifica:

$$x + 1 = \frac{1}{x}$$

donde podemos tener dos soluciones si resolvemos la ecuación que resulta:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

estas soluciones prasantan una curiosa coincidencia con la Gran Pirámide:

$x_1 = 1.618 = \sec 51º\ 49'$
$x_2 = 0'618 = \cos 51º\ 49'$
y dicho ángulo de 51º 49' es un valor ciertamente muy próximo a 51º 51' que es la pendiente que presenta la pirámide de Keops.

Otro número muy relacionado con la pirámide es el π correspondiente a $\frac{22}{7}$

$4 \cotg x \doteq \frac{22}{7} = \pi$ agipcia.

9.4.—Punto adherente.

Un punto x_0 es un punto adherente del conjunto lineal A si en todo entorno de x_0 hay puntos de A. Si $x_0 \in E$ es un punto adherente. Si $x_0 \notin E$ y es adherente tiene que ser punto de acumulación. Luego los puntos adherentes de E son todos los puntos de E más todos sus puntos de acumulación.

Se llama cierre o adherencia de un conjunto A y por $\overline{A}$ al conjunto

$$\overline{A} = A \cup A'$$

10.—CLASIFICACION DE LOS CONJUNTOS LINEALES.

Hemos visto anteriormente las definiciones de conjunto abierto y conjunto cerrado. Vamos a ver lo que entendemos por conjunto complementario y conjunto derivado.

Un conjunto lineal A se llama complementario de A y lo representamos por CA al conjunto R — A donde R es el conjunto de números reales.

Como hemos dicho en el punto 9.1. llamamos conjunto o clausura, derivado de A y lo representamos por A' al conjunto formado por los puntos de acumulación del conjunto lineal A.

De todo lo anterior podemos enunciar una serie de teoremas:

1. La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

2. La unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

3. La intersección de un número finito o infinito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

4. La unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

5. Todo conjunto lineal cerrado A contiene a todos sus puntos de acumulación.

6. El complementario de un conjunto abierto es un conjunto cerrado.

11.—CONJUNTOS ACOTADOS. TEOREMA.

Si tenemos un subconjunto A del conjunto R, decimos que A está acotado superiormente si existe un número real K tal que

$$\forall a \in A \Rightarrow a \leq K$$

a dicho número K se le llama cota superior de A.

Se dice que A está acotado inferiormente si existe un número real m tal que

$$\forall a \in A \Rightarrow m \leq a.$$

a dicho número m lo llamamos cota inferior del conjunto A.

En definitiva decimos que un subconjunto A de R está acotado cuando lo está superior e inferiormente. Definimos extremo superior de un conjunto A a la menor de las cotas superiores.

Extremo inferior de un conjunto A a la mayor de las cotas inferiores.

Para los números reales se cumple el teorema siguiente:

Teorema

Los subconjuntos acotados y no vacíos de R poseen extremo superior e inferior siendo estos únicos.

Los extremos superior e inferior de un conjunto A pueden pertenecer o no a dicho conjunto. En el caso de que pertenezcan al extremo superior se le llama máximo de A y al extremo inferior se le llama mínimo de A.

12.—TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Todo conjunto lineal acotado de infinitos puntos tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración:

Consideramos un conjunto lineal acotado A que por ser acotado estará contenido en un intervalo [a. b] cuya amplitud será:

$$d = |b - a|$$

Diviendo el intervalo [a , b] en dos partes iguales tenemos que al menos en una de estas partes encontraremos infinitos puntos del conjunto A, la llamaremos $[a_1, b_1]$ y su amplitud

$$d_1 = \frac{d}{2}$$

Si subdividimos de nuevo, en dos partes iguales, el intervalo [a, b] volveremos a encontrar un intervalo en el que haya infinitos puntos de A $[a_2, b_2]$ cuya amplitud

$$d_2 = \frac{d}{2^2}$$

si continuamos trabajando de manera análoga con $[a_2, b_2]$ y los sucesivos intervalos que vayan apareciendo, obtendremos una sucesión de intervalos cerrados con infinitos puntos de A:

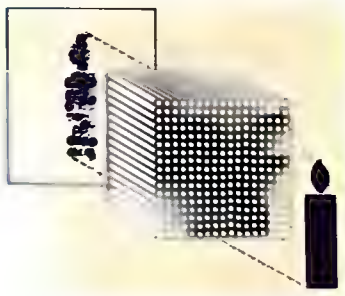
$$[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n],$$

Cada intervalo está contenido en el anterior y si consideramos las amplitudes de los intervalos que aparecen:

$$d, \frac{d}{2}, \frac{d}{2^2}, \frac{d}{2^3}, \ldots, \frac{d}{2^n}, \ldots$$

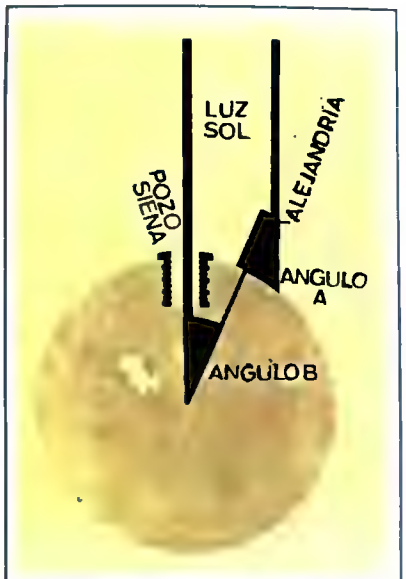
CAMBIOS DE ESCENA

Estos cubos ofrecen un ejemplo de la perspectiva reversibles. Sus caras marrones aparecen primero arriba, luego abajo. Se considera que por debajo del nivel consciente, las percepciones pasan alternativamente de la estimulación al reposo, y pueden por tanto cambiar para suavizar la fatiga.



EL OJO COMPUESTO

El ojo compuesto, común en muchísimos insectos, es simulado por este conjunto de pajitas para baber que proyecta sobre una pantalla la imagen confusa de una vela encendida. En el verdadero ojo del insecto, las pajitas son en realidad tubitos qua conducen partes minúsculas de la imágen a la retina, donde se reúnen para formar una escena completa. Como, sin embargo, cada tubito está provisto de una lente en el insecto, la imagen definitiva es mucho más nítida que en el experimento realizado.



LA DIMENSION TERRESTRE

La dimensión de la Tierra fue determinada por el matemático griego Eratostenes en el año 240 a. J.C. El descubrió qua el mismo día en que los rayos solares iluminaban el agua da los pozos profundos de Siena (hoy Assuan), en Egipto, en Alejandría, localidad distante 805 km., los rayos solares formaban con la vertical un ángulo (A) de 7º 2'. Con la ayuda de la geometría dedujo que al ángulo A era igual al formado por las dos líneas imaginarias que, partiendo desde el centro de la tierra, pasaban por las ciudades da Siena y Alejandría. Por consiguiente y siendo 7º 2' igual a 1/50 da circunferencia, astablacio que la distancia entre Siena y Alejandría era 1/50 de la circumfarencia terrestre. Mediante una multiplicación afirmaba que el valor de la circunferencia de la tierra ara de 40.250 km., que como vemos se aproxima bastante a los 40.000 km. da la medida moderna.

Observamos que tienden a cero. Por ello y de acuerdo con la proposición de Cantor, que ya hemos visto, esta sucesión de intervalos nos está definiendo un número real o un punto que está contenido en todos ellos.

Entonces cualquier entorno $(\alpha\text{-}\epsilon, d + \epsilon)$ del punto P, siendo α un número real, contendrá todos los intervalos desde $[a_1, b_1]$ en adelante donde $[a_n, b_n] \to 0$.

Por lo tanto en el entorno de P hay infinitos puntos del conjunto A y por ello P es un punto de acumulación de A.

13.—TEOREMA DE BOREL-LEBESGUE. COMPACIDAD.

Definición

Sea $C \to R$ un conjunto cerrado y acotado de números reales, y sea $\{A_\alpha\}$, una familia de conjuntos abiertos tales que:

$$C \subset U_\alpha A_\alpha$$

se puede entonces extraer una subfamilia finita de $\{A_\alpha\}$ cuya unión incluye el conjunto C.

Demostración

Aunque la demostración se dará detalladamente más adelante, se puede anticipar que este teorema se demuestra siguiendo un proceso análogo al realizado en el de Bolzano-Weierstrass.

Esta propiedad de los conjuntos cerrados y acotados de R se llama *compacidad*. Téngase en cuenta que el conjunto R no es compacto:

NOTA:

Un conjunto $B \subset R$ se dice que admite un recubrimiento abierto si existe una familia de abiertos $\{A_\alpha\}$ tal que $B \subset U A_\alpha$.

Si $B \subset U A_\alpha$ y $\{A_\beta\}$ es una subfamilia de $\{A_\alpha\}$ de manera que $B \subset U A_\alpha$ entonces se dice que existe un subrecubrimiento.

Un recubrimiento del conjunto B se dice que es finito si la familia $\{A_\alpha\}$ que recubre a B es finita.

14.—ESPACIO TOPOLOGICO.

Definición

Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{T}$ una clase, de subconjuntos de Ω. $\mathcal{T}$ define en Ω una topología si dicha clase tiene las siguientes propiedades:

1º $\Omega \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$

(El conjunto vacío y el conjunto total pertenecen a $\mathcal{T}$)

2º La unión de cualquier número finito o infinito de conjuntos incluidos en $\mathcal{T}$ es también un conjunto de $\mathcal{T}$.

3º La intersección de cualquier número finito de conjuntos incluidos en $\mathcal{T}$ es también un conjunto de $\mathcal{T}$.

Decimos que Ω tiene, mediante $\mathcal{T}$ estructura de espacio topológico. El par $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ es una topología.

Será topología discreta la que venga definida por:

$$\mathcal{T} = \{A / A \subset \Omega\}$$

Topología trivial es aquella que se define como

$$\mathcal{T}_z = \{\Omega, \emptyset\}$$

En un espacio topológico se llaman abiertos a los conjuntos incluidos en la clase $\mathcal{T}$ que define la topología. Se define como cerrados a los conjuntos complementarios de los abiertos.

En aquellas topologías en que Ω y $\emptyset$ son los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados se dice que el espacio topológico es *conexo*.

Debemos tener en cuenta que en un mismo conjunto pueden definirse distintas topologías partiendo de distintas clases $\mathcal{T}, \mathcal{T}_2 \ldots$ de subconjuntos de Ω.

15.—ENTORNOS. PROPIEDADES.

En un espacio topológico $(\Omega, \mathcal{T})$, E se dice que es entorno de un punto $a \in E$ si existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que:

$$a \in A \subset E$$

o sea si existe un abierto intermedio si además $E \in \mathcal{T}$ se dice que el entorno es abierto.

Todo conjunto abierto es entorno de cualquiera de sus puntos.

Así por ejemplo en la topología de la recta real

$I = (a, b)$ es entorno de cualquiera de sus puntos

$I = [a, b]$ es entorno de cualquiera de sus puntos excepto de los extremos.

UNA CALCULADORA QUE HA SUPERADO LA PRUEBA DEL TIEMPO

El ábaco es una de esas raras invenciones tan simples y tan eficientes que transcurren, sin modificaciones, a través de diversas civilizaciones. Hace 5.000 años tal vez, en la antigua Babilonia, el hombre descubrió por vez primera que, marcando las cifras en una tabla cubierta de polvo, era capaz de realizar cálculos más veloces que empleando los dedos.

La tablilla cubierta de polvo evolucionó y se convirtió en «ábaco», en el que pequeños discos, que representan las cifras, son movidos a lo largo de surcos labrados sobre una tablilla. Los chinos son, probablemente, los responsables del perfeccionamiento conocido aún hoy y realizado mediante granos móviles a través de las varillas. Los operadores orientales pueden sustrae, multiplicar y dividir igual que sumar.

HIPATIA

NACIO en Alejandría en el año 370 (d. da J.C.). Hija de Zenón de Alejandría, sus estudios los realizó en Atenas basados en las doctrinas de Platón y Aristótelas.

Cuando el patriarcado era el signo de la época, esta insigne mujer tuvo que remontar innumerables trabas para llegar a sar profesora de Matemáticas en Alejandría. Es la única mujer que hemos encontrado a través de nuastros estudios en matemáticas antiguas que alcanzó esta dignidad.

Partiendo da que la filosofía era la fuente de todo el saber humano, ésta estaba divídad en tres partes: la primera, la lógica, que estudiaba el camino para llegar a la verdad; la tercera estudiaba las realizaciones del hombre en cuanto a política, arta o Estado, y la segunda (la hemos dejado para el final, ya que fue la única da que usó Hipatía más a fondo, además de algo de lógica) que estudiaba todo lo que existía, como las matemáticas, física y química, derecho y medicina.

15.1.—Propiedades de los entornos.

Para todo punto $a \in E$ tenemos las siguientes propiedades:

a) Para todo entorno E del punto a; $a \in E$

b) Si E es entorno de a y $E \subset E_1 \Rightarrow E_1$ es entorno de a.

c) Si E_1 y E_2 son entornos de a, también lo es $E_1 \cap E_2$

d) $\forall$ E de a se puede encontrar un entorno E_1 de a tal que E es entorno de cualquier punto de E_1.

e) Separación. Dos puntos distintos pueden separarse mediante entornos disyuntos de cada uno de ellos.

Los espacios topológicos que cumplen esta propiedad se dicen *separados de tipo Hausdorff* y verifican $\forall x \neq$ y podemos encontrar un entorno de x, E(x) y un entorno de y E(y) tales que:

$$E(x) \cap E(y) = \varnothing$$

Como ejemplo de espacio topológico no separado es cualquier conjunto Ω con la topología trivial.

Espacio regular. Un espacio separado se dice regular si dado un punto x y un conjunto cerrado A tal que $x \in A$, existe un entorno de x, y un entorno de A sin punto común o también.

$$\overline{E}(x) \cap A = \varnothing$$

16.—PUNTO DE ACUMULACION.

Sea E un subconjunto de un espacio topológico Ω y, un punto $a \in \Omega$, se dice que es un punto de acumulación de E si $\forall$ abierto $A \subset \Omega$, que incluye el punto a existe algún otro punto b. (distinto de a, si $a \in E$) tal que $b \in E$.

El conjunto de los puntos de acumulación de E se llama conjunto derivado de E y se escribe E'.

Los conjuntos derivados verifican:

a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

b) Si $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

c) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

17.—PUNTO ADHERENTE.

En un espacio topológico Ω, un punto $a \in \Omega$ es un punto adherente de un subconjunto $E \subset \Omega$ si pertenece a E o bien es punto de acumulación de E.

Se dice que $a \in \Omega$, es un punto adherente, si todo entorno de a tiene una intersección no vacía con E, o sea si todo entorno de a contiene algún punto de E.

El conjunto de puntos adherentes de un conjunto E se le llama adherencia, cierre o clausura de E y se representa por $\overline{E}$.

El cierre, clausura o adherencia de E es la intersección de todos los cerrados que contienen a E.

Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\overline{E} = E \cup E'$

b) $E \subset \overline{E}$

c) si $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

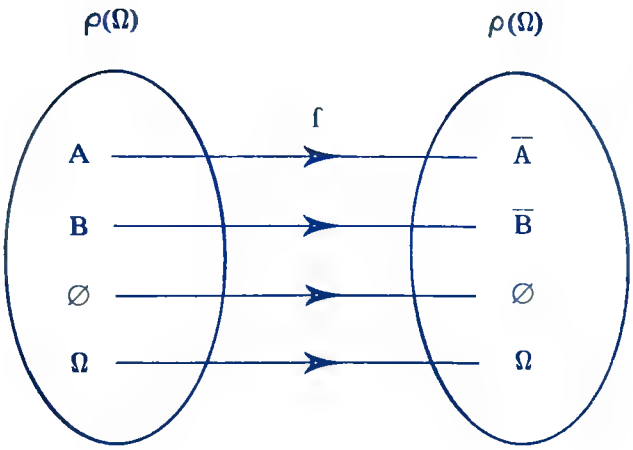
e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

f) A es cerrado si $\overline{A} = A$ ó si $A' \subset A$;.

g) $\overline{A}$ es cerrado.

18.—OPERADOR CLAUSURA.

En todo espacio topológico el operador clausura es la aplicación $\rho(\Omega)$ (clase de los subconjuntos de Ω) en $\rho(\Omega)$, tal que a cada subconjunto A de Ω $A \in \rho(\Omega)$, se le asocia el subconjunto $\overline{A} \subset \Omega$.



Propiedades

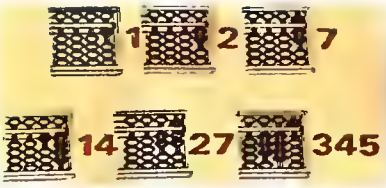
a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{\Omega} = \Omega$

b) $A \subset \overline{A}$

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

d) $(\overline{A}) = \overline{A}$ Idempotencia.

e) $\overline{A}$ de cualquier conjunto A es siempre un conjunto cerrado.



CONTANDO CON BOLAS

En el ábaco japonés se forma un número empujando las bolas contra la varilla de separación según su valor. Las bolas bajo la varilla valen (de derecha a izquierda) 1, 10, 100, 1.000; las de encima 5, 50, 500, 5.000.

UNA SUMA CON EL ABACO

Problema: sumar 272 y 236. En el primer esquema el 236 se representa por las bolas coloreadas llevadas hacia la varilla de separación. Luego que 272 está constituido por 2 unidades, 7 decenas y 2 centenas, las 2 unidades pueden registrarse (segundo esquema) inmediatamente; pero no puede hacerse lo mismo para las 7 decenas, para registrar las cuales se añade una bola de 100 y se quitan 3 de 10 (tercer esquema). En fin, para añadir las 2 centenas, se añade una bola de 500 y se quitan 3 da 100. Total: 508.

LEIBNIZ

EL SIMBOLO DE LA DERIVADA

La notación clásica para el concepto de derivada es:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

que fue establecido por Leibniz, descubridor, junto con Newton, aunque de manera independiente, del cálculo infinitesimal.

Sabemos que esta «notación de Leibniz» no tiene significado cuando se consideran los elementos que la constituyen independientemente, no se trata del cociente entre dos números sino que es una expresión intuitiva del límite de los cocientes:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

aunque Leibniz lo consideraba como el valor que tomaba este cociente cuando h es un número infinítamente pequeño, qua sa designa como dx.

Esta notación no es rigurosamente adecuada pero por su simplicidad y su importancia histórica se ha mantenido como notación clásica en el cálculo diferencial.

19.—PUNTO AISLADO.

1.— Un punto $a \in A$, siendo A un subconjunto de un espacio topológico se dice aislado si no es de acumulación de A:

$$a \in A \text{ es aislado si } a \notin A'$$

2.—Para cada punto aislado podemos encontrar un entorno E_a tal que $E_a \cap A = \{a\}$

3.— El conjunto de puntos aislados de A se llama aislado de A y se representa por: ais A

4. Si Ω es un espacio topológico separado en un conjunto finito incluido en Ω, todos sus puntos son aislados pero el razonamiento recíproco en general no es cierto.

5.— El aislado de A: ais $A = \overline{A} - A'$

20.—PUNTO INTERIOR.

Un punto x se dice interior a un conjunto E si E es entorno de x.

El conjunto de los puntos interiores de E se llama *interior de E*, y se representa por $\overset{o}{E}$.

El conjunto interior $\overset{o}{E}$ es la unión de todos los abiertos contenidos en él.

Podemos decir que un conjunto abierto coincide en su interior.

21.—PUNTO EXTERIOR.

Un punto x se dice exterior a un conjunto E si es interior a su complementario, es decir si existe un entorno de x contenido en el complementario de E.

El conjunto de los puntos exteriores se llama exterior de E y se representa por ext. E.

22.—PUNTO FRONTERA. PROPIEDADES.

Un punto x se dice frontera de E si para todo entorno que contenga a x contiene un punto de E y un punto complementario de E.

El conjunto de puntos frontera de E se llama frontera de E y se representa por Fr (E)

- la frontera de E es un conjunto cerrado.
- Un conjunto cerrado contiene a su frontera.
- Un punto de E es interior o exterior o frontera.

Propiedades

a) $\overset{o}{\overbrace{E \cap F}} = \overset{o}{E} \cap \overset{o}{F}$

b) $C\overline{E} = \overset{o}{\overbrace{CE}}$

$$C\,\overset{o}{E} = \overline{C\,E}$$

c) $E \subset \mathcal{F} \Rightarrow \overline{E} \subset \overline{\mathcal{F}}$

d) $\overline{E \cup \mathcal{F}} = \overline{E} \cup \overline{\mathcal{F}}$

e) $\mathcal{F}r(E) = \overline{E} \cap \overline{C\,E}$

f) $\overline{E} = E \cup E'$

23.—FILTROS Y LIMITES.

Sea Ω un conjunto cualquiera; no hace falta que sea espacio topológico. Un filtro de Ω es una clase $\mathcal{F}$ no vacía de subconjuntos de Ω que cumple las siguientes propiedades:

1.— $\emptyset \in \mathcal{F}$

2.— *Si* $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset \mathcal{B} \subset \Omega$, entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$

3.— Si $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap \mathcal{B} \in$

Así pues, un filtro en Ω es una clase de subconjuntos de Ω

Entre los cuales no está el vacío y que contiene la intersección de dos subconjuntos cualesquiera de la clase y cualquier conjunto que contenga un subconjunto de la clase.

24.—BASE DE FILTRO - FILTROS CONVERGENTES.

En un conjunto cualquiera Ω una clase $\mathcal{B}$ no vacía de subconjuntos de Ω es una base de filtro sobre Ω cuando se tienen las siguientes propiedades.

1.— $\emptyset \in \mathcal{B}$

2.— $\forall\ A, \mathcal{B} \in \mathcal{B}.\ \exists\ h \in \mathcal{B}$ tal que $h \subset A \cap \mathcal{B}$

• Si es una base de filtro sobre Ω entonces la clase $\mathcal{F} =$ $= \{A \mid \exists\ \mathcal{B} \in \mathcal{B},\ \mathcal{B} \subset A\}$ es un filtro sobre Ω;

Se dice filtro engendrado por $\mathcal{B}$.

• Dos bases de filtro sobre Ω $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, se dicen equivalentes si engendran el mismo filtro.

• Una condición necesaria y suficiente para que dos bases de filtro $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ sean equivalentes, es que cada conjunto de $\mathcal{B}_1$ esté contenido en un conjunto de $\mathcal{B}_2$ y al revés.

• En un conjunto Ω se pueden definir distintos filtros.

En el conjunto de los filtros se puede establecer un orden parcial, mediante la relación de inclusión.

$$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \qquad \mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2$$

LA ROSCA

Complejidad en la sencillez: la torsión de la cuña.

Alrededor del año 200 a. J.C., el matemático griego Apolonio de Pergas desarrolló la geometría de la curva elíptica, planteando las bases teóricas de la quinta y más reciente maquina simple: la rosca.

En un cierto sentido la rosca no puede definirse como máquina «simple», en cuanto que, para funcionar, depende de otra máquina, esto es, de una palanca. Puede considerársela como una cuña en torsión que obtienen su propia potencia no ya de la percusión sino de un movimiento de torsión imprimido por una palanca

En otras palabras puede imaginarse la rosca como un cilindro envuelto en un plano inclinado

Las más famosas de la Antigüedad son las de Arquímedes: una servía para transportar agua, otra para varar una embarcación sobre tres troncos de árbol.

La rosca puede funcionar asencialmente en dos modos: para levantar pesos y para comprimir o fijar objetos. En el primer caso la rosca transforma el movimiento de rotación en movimiento rectilíneo. Fue empleada por primera vez por antiguos orfebres para el cierre de brazaletes.

La ventaja mecánica de la rosca está en relación de dos dimensiones: la longitud de la palanca da acción y la distancia entre los fileteados (de otro modo llamados pasos), como claramante puede apreciarse en la figura.

UNA ROSCA EN EL PUNTO DE MIRA

El principio de la rosca se entiende mejor recortando de una hoja de papel un triángulo rectángulo y envolviéndolo alrededor de un lapicero. La hipotenusa del triángulo constituye el plano inclinado, o sea el fileteado de la rosca. El dibujo de la derecha demuestra como, cuando el brazo de la palanca cumple un giro completo en el sentido indicado por la flecha, la rosca se eleva una distancia igual a un paso, es decir, al intervalo entre filetes adyacentes.

ALAS QUE DISCURREN BAJO EL AGUA

Los cascos de las embarcaciones aquí mostradas en plena carrera se encuentran fuera del agua. Contrariamente a la mayor parte de las embarcaciones para elevadas velocidades, cuyo casco se apoya sobre la superficie del agua, éstas llamadas aliscafos, discurren sobre una aleta inmensa que sostiene la embarcación como las alas sostienen a un aeroplano. Las aletas, fijadas por debajo del casco de la embarcación, permanecen completamente sumergidas cuando la embarcación está parada, pero apenas comienza a moverse, el agua que roza los planos curvilíneos de sostén genera una fuerza de avance similar a

continúa en la página siguiente

Filtros convergentes

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico Ω converge al elemento $a \in \Omega$ si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro formado por los entornos de A, esto es si todo entorno de a pertenece a filtro $\mathcal{F}$. a se dice límite del filtro $\mathcal{F}$. Análogamente se habla de que $a \in \Omega$ es el límite de una base de filtro $\mathcal{B}$ si el filtro de base $\mathcal{B}$ converge al elemento a. Por consiguiente si a es el límite de un filtro $\mathcal{F}_1$ es también el límite de cualquier filtro $\mathcal{F}$ más fino que $\mathcal{F}_1$.

Llamamos ultrafiltro sobre Ω a un filtro $\mathcal{F}$ que no admite filtros más finos que él. Una condición necesaria y suficiente para que un filtro $\mathcal{F}$ converga al elemento $a \in \Omega$ es que todo ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$ converga al elemento a.

25.—PUNTO ADHERENTE A UNA BASE DE FILTRO.

Un elemento $a \in \Omega$ es adherente a la base de filtro $\mathcal{B}$ sobre Ω si $a \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$; esto es, si un punto de acumulación de todo conjunto de la base de filtro.

26.—BOLA ABIERTA.

Al igual que en el conjunto R, la topología usual era la de abiertos formados por $A_i = \{x \quad x \in (x_i - \epsilon, x_i + \epsilon) \quad R\}$. En R^2 los abiertos son los conjuntos A para los cuales se tiene que para cada punto (x_o, y_o) existe algún $\in > 0$ de forma que el conjunto:

$$c(x_o, y_o, \epsilon) = \{(x, y) \qquad (x_o - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < \epsilon\}$$

está totalmente incluido en A.

los conjuntos $\mathcal{B}_\delta = \{(x, y) \quad x^2 + y^2 < \delta^2\}$ son las bolas abiertas de centro (0, 0) y radio δ y son algunos de los abiertos de la topología usual $\mathcal{T}$ en R^2.

Cada bola abierta es entorno de todos y cada uno de sus puntos.

27.—BOLA CERRADA.

$\mathcal{B}^c_\delta$ de centro (0, 0) y radio δ es el conjunto: $\{x, y \quad x^2 + y^2 \leq \delta^2\}$ y es un punto cerrado y es entorno de todos los puntos (x, y) los que están sobre la circunferencia que los limita.

El complementario de una bola abierta.

$$C\mathcal{B}_\delta = \{(x, y) \quad x^2 + y^2 \geq \delta^2\} \quad \text{es un conjunto cerrado}$$

El complementario de una bola cerrada

$$C\mathcal{B}^c_\delta = \{(x, y) \quad x^2 + y^2 > \delta^2\} \quad \text{es un conjunto abierto.}$$

Veremos más adelante la importancia de las bolas ya que al espacio topológico $(E, \mathcal{T})$ se le llama espacio métrico y se representa por el par (E, d) en el que hemos introducido una distancia.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encontrar todas las topologías sobre un conjunto de tres elementos E = {a, b, c}. Decir si existe alguna topología separada.

Solución

a) Topología trivial. $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$

b) Topología discreta $\mathcal{T} = P(E)$

$\{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

c) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$

$\mathcal{T}_1' = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, E\}$

$\mathcal{T}_1'' = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, E\}$

$\mathcal{T}_1''' = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}$

$\mathcal{T}_2' = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$

Sólo es topología separada la discreta. Para todo par de elementos $\in$ E a, b a $\neq$ b existe entonces E_a y E_b tales que $E_a \cap E_b = \emptyset$

2.— Sean A y B dos subconjuntos de E. A es un conjunto abierto.

a) Probar que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Si A no es abierto ¿es cierta la propiedad?

b) Comprobar si se cumple en el caso de que E = R conjunto de los números reales A = [0, 1] B = (1, 2].

c) Enunciar la propiedad complementaria a partir de

$$C(\overline{A \cap B}) \subset C(A \cap \overline{B})$$

Solución

a) Sea $a \in A \cap \overline{B}$

$$\forall v \in E(a)\ v \cap A \neq \emptyset \text{ y es } E(a)$$

Al ser A un abierto es entorno de a.

$v \cap A \subset B$ ya que $a \in \overline{B}$ es decir $\forall\ v \in E\ (a) \subset A \cap B$

entonces: $a \in \overline{A \cap B}$

luego $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

viene de la página anterior

la fuerza de ascensión del aire sobre cada parte de las alas de un aeroplano. Cuánto mayor es la velocidad de la embarcación tanto más se levanta; cuando las aletas emergen empujan el casco completamente fuera de la superficie del agua. Ello significa una velocidad mayor, ya que se elimina el frotamiento del casco y una marcha más plana dado que el casco no es golpeado por las olas.

La idea de los aliscafos no es nueva. En 1918, Alexander Graham Bell mejoró todos los récords de velocidad fuera borda con un primer modelo de aliscafo, el AD-4 que viajaba a una velocidad de 70,85 millas por hora. Pero para la realización práctica de esta idea hubo de esperarse hasta 1953, cuando entró en servicio el primer aliscafo comercial. Como medio de transporte de viajeros los aliscafos realizan actualmente viajes en aguas del Nilo, en el estrecho de Mesina, entre Nápoles y Capri y en el Río de la Plata en América del Sur. Se ha examinado incluso la posibilidad de su empleo como cazasubmarinos. Hoy en día, se encuentran ya en las carreras aliscafos a reacción. Una de estas embarcaciones ya ha «volado» a 100 nudos por hora.

EUCLIDES

MATEMATICO puro del siglo III a. de C. Fundó en Alejandría la más celebre escuela de la antigüedad. Gran importancia tiene su postulado que dice: «Por un punto del pleno no puede trazarse más que una recta peralela a otra recta dada.»

Es famoso por sus *Elementos*, considerado hoy como el libro de Geometría por excelencia. Consta de trece libros: los cuetro primeros tratan sobre la geometría y figuras circulares y poligonales; el 5.º y 6.º están dedicados a la semejanza estudiando las razones y las proporciones. En los libros 7,8 y 9 hace un estudio sobre los números enteros. En el 10.º libro, el más largo y perfecto de todos, está dedicado a los estudios algebraicos. Los tres últimos tratan de la Geometría del Espacio.

La obra *Lugares de la superficie* quizá tuviera por objeto el estudio de las secciones planas de las superficies E (decimos quizá, porque se trata de una obra perdida). En su obra *Optica* estudia igual y paralelamente a la Geometría sus postulados, partiendo de algunas proposiciones fundamentales, entre ellas, quizá la más importante sea la que nos indica que la propagación de los rayos luminosos see siempre en línea recta.

En fin, la «Geometría Euclidiana» ha dado paso con sus axiomas y postulados a la geometría que hoy día está en vigor.

b) $A = [0, 1]$ $A \cap \overline{B} = \{1\}$
$B = (1, 2]$ $A \cap B = \varnothing$ } En este caso no se cumple.

c) Para pasar al complementario.

$$C\ (\overline{A \cap B}) \subset C\ (A \cap \overline{B})$$

$$\overset{o}{\overbrace{C\ (A \cap B)}} = \overset{o}{\overbrace{C\ (A) \cup C\ (B)}} \subset C\ (A) \cup C\ (B) =$$

$$= C\ (A) \cup (\overset{o}{\overbrace{C\ B}})$$

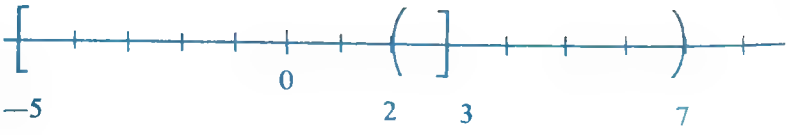
y por consiguiente si A_1 y B_1 son dos subconjuntos de E A_1 cerrado.

$$\overset{o}{\overbrace{A_1 \cup B_1}} \subset A_1 \cup \overset{o}{B_1}$$

3. Sea el conjunto E formado por los puntos de abcisa entera del intervalo, [—5, 3] junto con los puntos de abcisa no entera del intervalo (2, 7). Determinar los puntos aislados y los puntos de acumulación de E.

Solución

Consideremos el conjunto E:



Puntos aislados, sabemos que son aquellos que perteneciendo a E podemos determinar un entorno reducido de puntos que no pertenecen a E.

En este caso tenemos que —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1 son puntos aislados de E pues pertenecen al intervalo [—5, 3] donde solo consideramos los números enteros y por tanto podemos definir un entorno en el cual no tenemos elementos de E.

Puntos de acumulación son aquellos puntos de E en los que si definimos un entorno reducido de dichos puntos, hay puntos de E, así aquellos que forman el intervalo (2, 7).

TEMA 34

SUCESIONES Y LIMITES

INDICE

1.— VALOR ABSOLUTO. PROPIEDADES.
2.— DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.
3.— INTERVALOS EN LA RECTA REAL.
4.— SUCESION DE NUMEROS REALES.
5.— IGUALDAD DE SUCESIONES.
6.— FORMAS DE REPRESENTACION DE SUCESIONES.
7.— SUBSUCESIONES.
8. OPERACIONES CON SUCESIONES.
- **8.1.**—Suma de sucesiones.
- **8.2.**—Resta de sucesiones.
- **8.3.**—Multiplicación de sucesiones.
- **8.4.**—División.
- **8.5.**—Producto de una sucesión por un número real.
- **8.6.**—Potencia de exponente un número.
- **8.7.**—Potencia de exponente una sucesión.

9.— SUCESIONES MONOTONAS.
10.— SUCESIONES ACOTADAS.
11.— SUCESIONES DE CAUCHY.
12.— SUCESIONES CONVERGENTES DE NUMEROS REALES. LIMITE DE UNA SUCESION DE NUMEROS REALES.
13.— SUCESIONES DIVERGENTES.
14.— PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES DE NUMEROS REALES.
15.— INFINITESIMOS.
- **15.1.**—Infinitésimos equivalentes.
- **15.2.**—Propiedades de los infinitésimos.

TEMA 34

CONTINUACION

16.—ALGEBRA DE LIMITES. CUADRO RESUMEN DE LAS OPERACIONES CON LIMITES.
- **16.1.**—Límite de una suma de sucesiones.
- **16.2.**—Límite de un cociente, producto de sucesiones.
- **16.3.**—Límite de un cociente de sucesiones.
- **16.4.**—Límite de potencias de sucesiones.

17.—EL NUMERO «e». SUCESIONES RELACIONADAS CON EL.

18.—CALCULO DE LIMITES.
- **18.1.**—Límite del cociente de dos polinomios en «n».
- **18.2.**—Límite del logaritmo.
- **18.3.**—Cálculo con límites infinitos.

19.—REGLAS PRACTICAS PARA EL CALCULO DE LIMITES DE SUCESIONES REALES O RACIONALES.
- **19.1.**—Criterio de Stolz.
- **19.2.**—Criterio de la media aritmética.
- **19.3.**—Criterio de la media geométrica.
- **19.4.**—Criterio de la raíz.

20.—RESUMEN DE FORMULAS UTILES EN EL CALCULO DE LIMITES.

21.—ESTUDIO DE SUCESIONES.
- **21.1.**—Sucesiones recurrentes simples.
- **21.2.**—Sucesiones simultáneamente recurrentes.
- **21.3.**—Sucesiones con recurrencia lineal.

22.—SERIES NUMERICAS.
- **22.1.**—Serie geométrica.

23.—CONSTANTE DE EULER.

24.—PROBLEMAS Y SOLUCIONES.

TEMA 34

SUCESIONES Y LIMITES

1.—VALOR ABSOLUTO

Definimos el valor absoluto de un número real x y lo expresamos por $|x|$ al elemento de $R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ definido como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En definitiva es una aplicación φ de R en R^+ $x \xrightarrow{\varphi} |x|$ que tiene las siguientes propiedades.

Propiedades del valor absoluto.

Si tenemos un número real $y > 0$ la expresión $|x| \leqslant y$ es equivalente a $-y \leqslant x \leqslant y$

la representación de esta expresión en la recta real sería:

$$-y \leqslant x \leqslant y$$

1) $\varphi(x) = |x| = |-x| = \varphi|-x| = \varphi(-x) \geq 0$
2) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Si x e y son del mismo signo

ROSAS

Pocos dedos caminen como risas ajustadas]
Una oreja nos sacará pocos peces
¿Quién es aquella rosa en aquella ciega casa?]
Y llegan sutiles, graciosos, ciegos aviones]
Gritan malamente junto a una rosa]
Brincar es sofocante, gozar es tierno]

La poesía de los ordenadores, como en el ejemplo de arriba, está compuesta por un aparato conocido entre los experimentadores como A.B. La máquina escoge al azar palabras y construcciones gramaticales. Programada con 32 estructuras grmaticales y un vocabulario de 850 palabras, A.B. produjo «Rosas». Usando un vocabulario más amplio y más construcciones sintácticas compuso «Corsés» y «Filetes». Si bien el significado en estas poesías es accidental, los experimentadores esperan progremar A.B. en modo que escriba frases con sentido pleno.

$$|x+y| \quad |x|+|y| = \begin{cases} x+y \text{ si } x \geq 0 \\ -(x+y) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

en otro caso x e y son de distinto signo

Sea por ejemplo $x \leq 0 \leq y$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \leq -x \ (1) \\ -y \leq 0 \leq b \ (2) \end{array}\right\} \text{ que implica respectivamente}$$

sumando a los extremos de la desigualdad (1) y

$$x + y \leq -x + y = |x| + |y|$$

restando a los extremos de la desigualdad (2) x

$$-y - x \leq y - x = |x| + |y|$$

$$\text{luego} |x+y| = \begin{cases} x+y \text{ si } x+y \geq 0 \\ -x-y \text{ si } x+y < 0 \end{cases}$$

y por tanto $|x+y| \leq |x|+|y|$

Esta propiedad se puede generalizar a cualquier número finito de sumandos.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

4) $|x \cdot y| = |x||y|$

Si x e y son ≥ 0 se tiene $x \cdot y \geq 0$

$$x \cdot y = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ pues } \begin{array}{l} x = |x| \\ y = |y| \end{array}$$

si x e y son negativos $x \cdot y \geq 0$ y

$$|x \cdot y| = x \cdot y = (-|x|)(-|y|) = |x||y|$$

En cualquier caso pues $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

5) Si $x \neq 0$ $|x \cdot x^{-1}| = 1 = |x||x^{-1}|$

y como $x \neq 0$ $x^{-1} \neq 0$ y por tanto

$$|x^{-1}| = \frac{1}{|x|} = |x|^{-1}$$

2·2=5

Vamos a demostrar por qué $\sqrt{2}$ es un número irracional. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

siendo a y b números enteros primos entre sí. Elevando los dos miembros al cuadrado:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2.$$

se deduce que a será un número par ya que su cuadrado lo es.

Si ponemos:

$$a = 2a_1$$
$$(2a_1)^2 = a^2 = 2b^2$$
$$4a_1^2 = 2b^2$$

$$2a_1^2 = b^2$$

luego b ha de ser también par.

Lo anterior es incompatible con el supuesto de que a y b sean primos entre sí. Por tanto $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ y por tanto $|x + y| - |y| \leq |x|$

$|x - y| \leq |x| + (-y) \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$

que es la 2.ª parte de la desigualdad

$$|x' + y'| - |y'| \leq |x'|$$

y si

$$\begin{matrix} x' = x - y \\ y' = y \end{matrix} \qquad |x| - |y| \leq |x - y|$$

de igual modo $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$

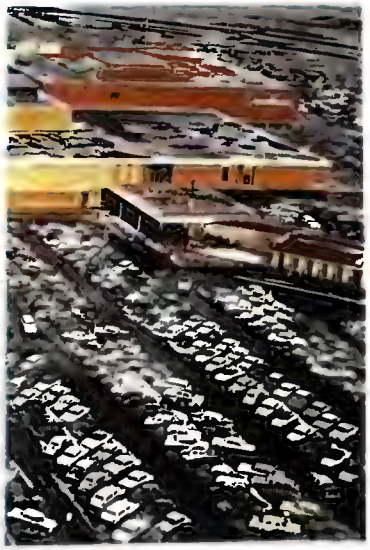
y por tanto $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

2.—DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Definición.—

Llamamos distancia entre dos puntos x e y de la recta real $\mathbb{R}$ y lo expresamos por d (x,y), al número.

$$d(x,y) = |x - y| = |y - x|$$



ECONOMIA BASADA EN LAS RUEDAS

El vínculo del automóvil con cada aspecto de la economía americana es tal que una de cada seis empresas empresas está directamente relacionada con este en un modo u otro. Existen 61.333 comerciantes de coches, 144.459 talleres de reparación y 4.022 fábricas. Una de éstas, la General Motors es la octave sociedad más grande del mundo (la primera es la American Telephone and Telegraph Company que posee el mayor número de vehículos a motor del mundo). Existen también servicios de coches blindados, refinerías de petróleo crudo, lavado automático, firmas de taxis, moteles, negocios de pinturas, y todos deben su existencia al automóvil. Sus ingresos brutos suman 11,5 billones de pesetas enuales y crean más de 12 millones de empleos, sexta parte de la población activa de la nación.

FLOTANDO SOBRE UNA PLATAFORMA DE CEMENTO

La tierra alrededor de Seattle, Washington, está recortada en pertes por tres espejos de agua: el lego Washington, de 60 m. de profundidad, un estuario, el Canal Hood y les aguas sometidas a mareas del Puget Sound. Sinun ingenioso sistema de puentes, el tráfico no podría discurrir entre las diversas secciones de la ciudad; grandes partes del complejo urbanístico quedarían aisladas de las factorías y bosques del norte y de las regiones industriales del sur. Pero cuando los puentes, ilustrados en estas páginas, se proyectaron inicialmente, pudo constatarse que tanto el canal como el lago eran demasiado profundos para implantar pilones de sosten para un puente colgante y demasiado largos para cualquier tipo de arco.

Teniendo que afrontar el obstáculo Seattle decidió hacer flotar sus puentes sobre unas barcas en forma que cada ojo se apoyase en el agua que atravesaba. Aquel sobre el Canal Hood atraviasa más de un kilómetro de agua, su pavimento se apoya sobre 23 pontones de cemento tensado. Para impedir que la plataforma sea llevada por la corriente, el puente está fijado con 26 kilómetros de cable a anclas de cemento que pesan 800 toneladas.

Ejemplo:

Hallar la distancia entre -1 y 2.

Solución

$$d(-1,2) = |(-1) - 2| = |2 - (-1)| = |3| = 3$$

$$d(-1,2) = 3$$

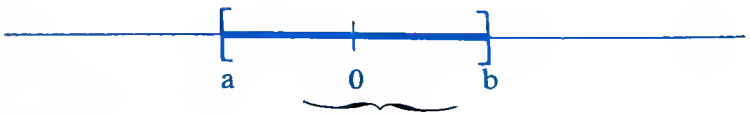
3.—INTERVALOS EN LA RECTA REAL.

Asimismo como recordatorio de la definición de intervalos en la recta real que ya vimos en el punto 5 en el tema anterior, tenemos:

a) Intervalo cerrado: Dados dos números reales a y b; $a \neq b$, llamamos intervalo cerrado de extremos a y b y lo expresamos por: [a b] el conjunto de números reales x que verifican $a \leqslant x \leqslant b$.

Es decir:

$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}$$

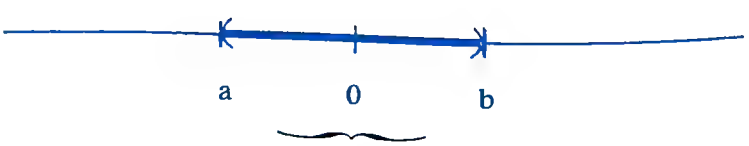


[a,b]

b) Intervalo abierto: Dados dos números reales a y b siendo $a \leqslant b$ llamamos intervalo abierto de extremos a y b y lo expresamos por (a,b), al conjunto de números reales x tal que $a < x < b$.

Es decir:

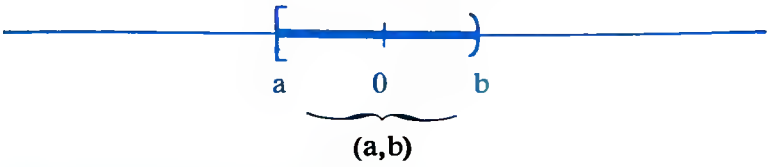
$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$



(a,b)

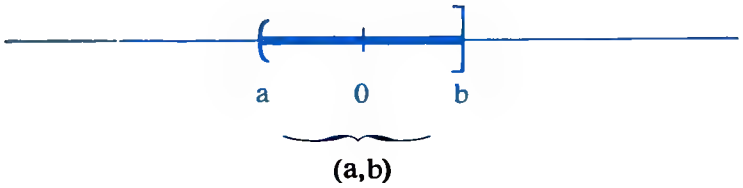
c) **Intervalo abierto por la derecha:** Dados dos números reales a y b llamamos intervalo abierto por la derecha de extremos a y b.

$$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$



d) **Intervalo abierto por la izquierda:** Dados dos números reales a y b, llamamos intervalo abierto por la izquierda de extremos a y b.

$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$



Ejemplo

Dados los intervalos $A = (-2,0)$; $B = [-5,-1]$; $c = [0,1)$
Calcular $A \cap C$; $A \cup C$, $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$; $(A \cap C) \cup B$

Solución

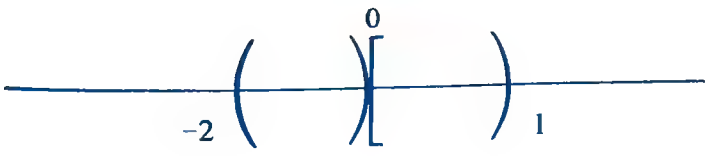
a— $A \cap C$

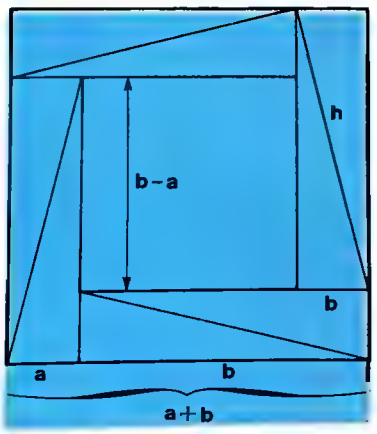
$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \}$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid +0 \leq x < 1 \}$$

$A \cap C$ sería el conjunto de puntos comunes a A y C, como estos conjuntos no tienen ningún punto común, entonces:

$$A \cap C = \emptyset$$

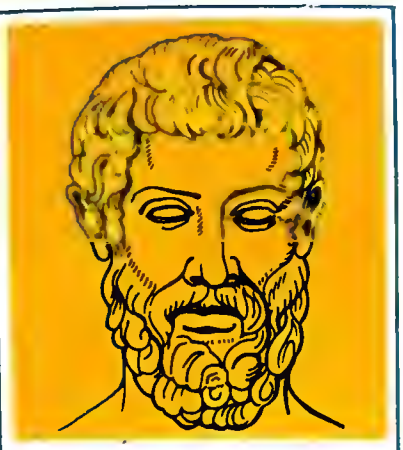




El famosísimo teorema de Pitágoras ha tenido en distintas épocas y para distintos matemáticos demostraciones diferentes.

Prueba de ello es une demostración del siglo II debida a Tchao Kium K'ing en la cual se sirve de un diagrama constituido por ocho triángulos rectángulos que se incluyen en un cuadrado cuyo ledo es la suma de los dos catetos y que se sitúan al exterior de otro cuadrado cuyo lado es la diferencia de catetos.

Otra aportación importante de la geometría china es la determinación de π a partir de un cilindro que data del reino de Ways Mang y cuyo volumen aparece inscrito como 1.620 pulgadas cúbicas y cuyas dimensiones, que también aparecen inscritas, indican que $\pi = 3.1547$.



DIOFANTO
"Padre del Algebra"

CUANDO la Aritmética estaba dominada, apareció DIOFANTO, gran maestro de ésta, que quiso llegar al más allá. Le llevó toda una vida de estudios, hasta tal punto, que se ha considerado, y de hecho lo es, el padre del Algebra. Sus problemas fueron tan claros, variados y hábilmente solucionados, que sirvieron como modelo a Euler y Gauss. La solución a sus problemas datan de hace más de 15 siglos.

Su historiador (Anónimo) analizó detalladamente los trabajos de Diofanto, trabajo que fue paralelo a su vida y a sus estudios. De ello es airoso el acertijo de su edad, el cual dice así:

¡Viajero! Aquí reposan los restos de Diofanto, y los números demostrarán cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su infancia; su juventud, la doceava parte; la séptima parte, su matrimonio estéril; cuando pasaron cinco años más tuvo su primer hijo; éste murió a la mitad de la edad total del padre; cuatro años después sobrevino la muerte de Diofanto. ¿Cuántos años vivió?

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$$168x + 84x + 144x + 5.040 + 504x + 4.032x = 1.008x$$

$$9.072 = 1.008x - 900x$$

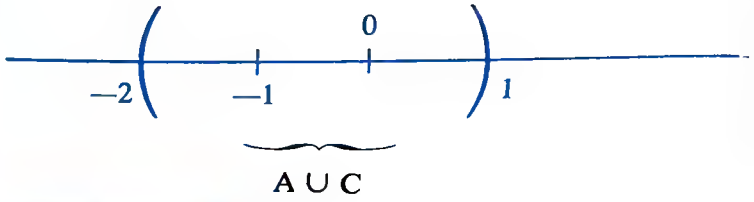
$$108x = 9.072$$

$$x = \frac{9.072}{108} = 84$$

b— $A \cup C$

El conjunto de puntos comunes y no comunes a ambos intervalos.

$$A \cup C = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \} = (-2,1)$$



$A \cup C$

c— $A \cap B \cap C$

Sabemos que para la intersección se verifica la propiedad:

$$A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = (A \cap C) \cap B$$

Del apartado a) sabemos que $A \cap C = \varnothing$ luego nos queda $\varnothing \cap B = \varnothing$

Por tanto $A \cap B \cap C = \varnothing$

d— $A \cup B \cup C$

Tenemos como en el caso anterior que

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = (A \cup C) \cup B$$

Del apartado b) sabemos que $A \cup C = (-2,1)$

$$A \cup B \cup C = (-2,1) \cup [-5,-1] = [-5,1) =$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < 1 \}$$

e— $(A \cap C) \cup B$

Del apartado a) conocemos que $A \cap C = \varnothing$, entonces tenemos que $\varnothing \cup B = B$

$$(A \cap C) \cup B = [-5,-1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant -1 \}$$

Entorno de un punto

Llamamos entorno de un punto "x" de radio ε al conjunto de puntos, que están a una distancia x menor que ε. Lo expresamos del modo siguiente:

$$E = (x,\varepsilon) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon \} = y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \}$$

también lo podemos expresar como:

$$E(x,\varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Esta definición, ya la hemos visto en el tema anterior.

Ejemplo

Determina el entorno E(0,2)

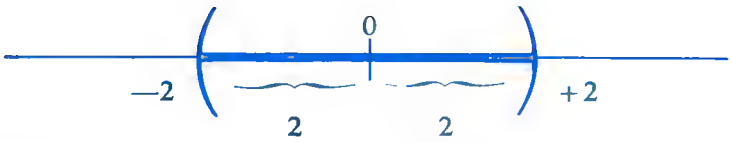
Solución

por la definición vista anteriormente

$$E = (0,2) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y| < 2 \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < +2 \} =$$

$$= (-2, +2)$$

Gráficamente será:



Ejemplo

Averiguar si los puntos $y = -1$, $y = +2$, $y = 5$ pertenecen al entorno E (1,3)

Solución

Primero determinamos, cuál es el E(1,3).

$$E(1,3) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - 1| < 3 \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 4 \}$$

por tanto se verifica que

$$-1 \in E(1,3)$$

$$+2 \in E(1,3)$$

pero el punto $y = +5$ no pertenece a dicho entorno ya que la distancia de este punto al "1" es "4" que es mayor que el radio del entorno.

El dios Pan es representado casi siempre tocando la flauta el cuerpo mitad hombre y mitad macho cabrio. En un principio, en Arcadia, se le consideró como un dios pastoril, aunque luego, con el paso del tiempo se le llamó Gran Pan o dios de toda la naturaleza y era considerado como la encarnación de la potencia viril y la fuerza muscular.

También se le atribuían poderes mágicos y se le dió culto en la Acrópolis, consagrándosele el pino y el roble.

Su figura sirvió como modelo en algunas estatuas y vasos griegos, además de estar representado en numerosos frescos y utensilios de la época.

Los poetas griegos y romanos en sus relatos pastoriles al hablar de la flauta atribuyen su invención al dios Pan.

IGUALES PERO ENMASCARADOS

En los dos grupos de círculos, aquel central de los de erriba parece más pequeño que el otro, también en el centro, ade abajo. En reelidad son iguales. El ojo es engañedo por el hábito de evaluar les dimenaiones comparando con los objetos circundantes.

Ejemplo

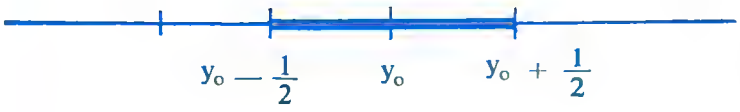
Determina el conjunto de puntos cuya distancia al punto y_o es menor que 1/2.

Solución

Los puntos cuya distancia al punto y_o es menor que 1/2 forman un entorno del punto y_o y radio $\varepsilon = 1/2$, por tato el conjunto pedido será:

$$E(y_o 1/2) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - y_o| < 1/2 \} =$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y_o - \frac{1}{2} < y < y_o + \frac{1}{2} \}$$



4.—SUCESION DE NUMEROS REALES.

En el lenguaje corriente la palabra sucesión se utiliza para designar un conjunto de cosas o sucesos en un orden.

Definición

Se llama sucesión de números reales a toda aplicación de $N^* = = N - \{0\}$ en R. Así, a cada número natural N, le hacemos corresponder un número real S_n, de tal manera que el conjunto ordenado:

$$S_1, S_2, S_3, \text{-------} S_n, \text{-------}$$

define una sucesión infinita.

Cada término de la sucesión tiene asignado un número natural de manera que se puede hablar del primer término S_1, del segundo término S_2 y en general del término n-esimo S_n. Cada término S_n tiene un siguiente, S_{n+1} y por tanto no existe un útimo término.

Ejemplo

Calcular los primeros términos de la sucesión dada por $S_n = n$

Solución

Los primeros términos serán $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$, -------

Ejemplo

Hallar los primeros términos de la sucesión definida por

$$S_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

Solución

$$S_1 = 2\ ,\ S_2 = \frac{5}{2}\ ,\ S_3 = \frac{10}{3}\ \text{------}$$

Ejemplo

Calcular los términos S_1 , S_3 , y S_7 de la sucesión definida por

$$S_n = \frac{2n - 1}{n^2}$$

Solución

$$S_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1^2} = 1$$

$$S_3 = \frac{2 \cdot 3 - 1}{(3)^2} = \frac{5}{9}$$

$$S_7 = \frac{2 \cdot 7 - 1}{7^2} = \frac{13}{49}$$

Diremos que una sucesión es constante cuando todos sus términos son iguales.

Ejemplo

La sucesión cuyos términos son:

$S_1 = 3\ ,\ S_2 = 3\ ,\ S_3 = 3\ ,\ S_4 = 3$ es una sucesión constante.

5.—IGUALDAD DE SUCESIONES.

Dos sucesiones de numeros reales definidas por a_n y b_n son iguales cuando para **todo** " i " se tiene que $a_i = b_i$

siendo i = 1,2, 3--- n----.

Ejemplo

Dadas dos sucesiones definidas por:

$a_n = n^2 - 2n + 1$ y $b_n = (n - 1)^2$. Comprobar si son iguales.

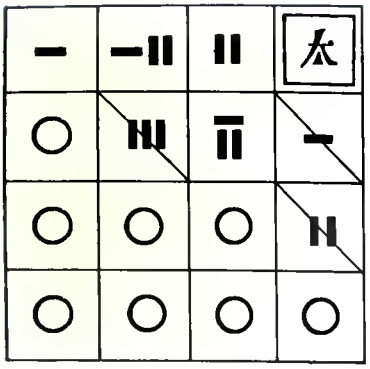
CLAUDIO PTOLOMEO

NACIO en el 90 y murió en el año 168 después de C. Claudio Ptolomeo, gran aficionado a las matemáticas, a la geografía y a la astronomía, realizó grandes estudios en estas tres vertientes, aunque sean pocas las obras que nos han quedado de él.

Vivió en Alejandría en donde desarrolló sus conocimientos hasta la trigonometría. Escribió el célebre «Almagesto», palabra que significa «lo más grande», y en ella hace un estudio completo de sintaxis matemático. En geografía sus aciertos fueron innumerables. Realizó un mapa donde están localizados todos los países conocidos en aquella época, e incluso otros que ni siquiera se han podido localizar. En sus mapas llegó a representar hasta los países más orientales de Asia.

En su «Almagesto» también hay grandes estudios astronómicos y, aunque con grandes errores de base, sirvieron esos estudios para consideraciones posteriores y con mucha más precisión. Consideró la Tierra como el centro del Universo y a su alrededor giran el Sol, la Luna y los Planetas, en un complicado y matemático sistema; a éstos los considera como movimientos de rotación.

La idea de Ptolomeo de considerar la Tierra como centro del Universo fue aceptada durante muchos siglos, incluso podia conocer las diversas posiciones de los astros en cualquier fecha con el estudio matemático de los movimientos, lo que le llevó a predecir Eclipses con total exactitud.



ECUACIONES CHINAS

Liye es un importante matemático que vivió en el monte de China entre los siglos XII y XIII y desarrolló una importante tarea en el estudio de círculos inscritos en triángulos y la resolución de las ecuaciones que estos problemas geométricos planteaban.

La resolución de dichas ecuaciones de hasta cuatro incógnitas tenía una notación algo peculiar.

Se representaba una cuadrícula o tantas como ecuaciones a resolver y se situaban las incógnitas del siguiente modo: se inscribía en el centro la palabra supremo: 太 que hace referencia al centro del universo, a la estrella polar o al hecho supremo y se sitúan a su alrededor los siguientes coeficientes de las incógnitas ordenadamente.

Aquí tenemos un ejemplo con la ecuación $10y^3 + 12y^2 - - 10x = 0$, éste es el aspecto que tiene en nuestra notación actual, veamos cómo lo representaría Liye (incluyendo entre paréntesis las incógnitas a las que corresponden los coeficientes, en la notación habitual).

(y^3) (y^2) (y)

continúa en la página siguiente

Solución

Escribimos los términos de ambas sucesiones

$$a_1 = 1-2+1=0, \quad a_2 = 4-4+1=1, \quad a_3 = 9-6+1=4\text{---}$$

$$b_1 = (1-1)^2 = 0, \quad b_2 = (2-1)^2 = 1, \quad b_3 = (3-1)^2 = 4\text{-----}$$

Comparando cada uno de los términos, se verifica efectivamente que son iguales.

Ejemplo

Comprobar si son iguales o no, las sucesiones cuyos primeros términos son:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad a_3 = 3 \quad a_4 = \frac{5}{4} \text{ -----}$$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{2}{3} \quad b_3 = 3 \quad b_4 = \frac{4}{5} \text{ ------}$$

Solución

Si comparamos término a término, vemos que existen términos que no son iguales. Por tanto, no se da la igualdad entre ambas sucesiones.

NOTA.— Dadas dos sucesiones cualesquiera, es suficiente con que tengan un solo término diferente, para afirmar que no son iguales.

6.—FORMAS DE REPRESENTACION DE SUCESIONES.

Toda sucesión está determinada cuando conocemos todos sus términos. Seguidamente vamos a ver varias formas de determinar una sucesión.

a) Por una propiedad común a todos los términos.

Ejemplo

Expresar «la sucesión de los números pares»

Solución

Los términos de esta sucesión serán los números pares ordenados de menor a mayor, es decir, 2, 4, 6, 8 -------

Ejemplo

Expresar «la sucesión de los números primos mayores que 9»

Solución

El primer término de esta sucesión es el "11" ya que el "10"

no es número primo. Los siguientes términos serán los números primos a partir del "11" ordenados de menor a mayor

11, 13, 17, 19, 23 ------

b) Por una expresión matemática

Ejemplo

Expresar los primeros términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{1}{n}$

Solución

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \; a_3 = \frac{1}{3} \text{ ------}$$

NOTA.— Es la forma más usual para definir una sucesión, ya que conocido el término general, podemos hallar todos los términos de dicha sucesión.

c) Algunas veces se necesitan dos o más expresiones matemáticas para definir una sucesión.

Ejemplo

Expresar los primeros términos de la sucesión definida por

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad a_{2n} = \frac{2n^2 - 3}{n}$$

Solución

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad a_2 = \frac{2 \cdot 4 - 3}{2} = \frac{5}{2} \; a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot 16 - 3}{4} = \frac{29}{4} \text{ ------}$$

Los primeros términos serán: $1, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{29}{4}$ ----

NOTA.—La exprexión a_{2n-1} nos define los términos impares de una sucesión. La expresión a_{2n} nos define los términos pares.

Ejemplo

Expresar los primeros términos de una sucesión definida por:

$a_n = \frac{n}{2}$ cuando n = 1, 2, 3, 4, ------

$a_n = \frac{1}{n}$ cuando n = 5, 6, 7, -------

viene de la página anterior

Hay que tener en cuenta que el sistema de numeración no se representaba por las cifras que usamos nosotros y que los coeficientes negativos vienen indicados por una diagonal que cruza el retículo correspondiente.

El cero se simboliza por un círculo y se sitúa en la casilla correspondiente a aquellos coeficientes cuyas incógnitas no aparecen en la ecuación.

En el caso de una ecuación de una incógnita y que además contenga potencias negativas de la x se representaba por una disposición lineal de las casillas situando en el centro el supremo y a ambos lados los coeficientes: a la izquierda los de exponente positivo y a la derecha los de exponente negativo.

Veamos un ejemplo:

$$\frac{3x^3 + 10x^2 - 3x - 7x^{-1}}{2x^{-2}}$$

Liye publicó en 1258, Yi Kou Yen. Tovan, es decir, nuevos ejercicios sobre la representación y resolución de ecuaciones en esta forma.

La bicicleta saludable y no contaminante, medio de transporte apareció a mediados del siglo XIX con aspecto tosco y pesado.

Se construían de hierro y de madera, eran impulsadas sin pedeles y dirigidas por un timón en lugar de manillar.

Las gentes de esta época no simpatizaban mucho con este artilugio y lo llamaban «caballo de hierro».

Necesito unos cuarenta años para que se modernizara y fuera empleada como medio de locomoción.

Fue en 1896 y en las que fueron primeras Olimpiadas modernas de Atenas, donde se impuso como discipline olímpica.

Desde entonces las mejoras han sido continuas, desde ruedas de hierro, madera o las de goma rnaciza se han llegado a perfeccionar los neumáticos que inventó Dunlop.

La moderna bicicleta consta de cuedro, unide por las palomillas e las dos ruedas que giran librernente sobre su eje y la delantera adernás marca la dirección con el manillar, el movimiento lo imprime el ciclista por los pedales unidos a una rueda dentada, plato, y el piñón mediante la cadena que inventó Leonardo da Vinci, distintos tamaños de piñones determinan la velocidad de merche. Este sería un esquema general pero según las diferencias de utilizeción se emplean materiales y elementos mecánicos diferentes que permiten distinguir a la bici de paseo de la de «bici-cros» de las extraligeras, bicicletas de cornpetición en pista o las resistentes máquinas de carretera. Tode una gama de económicos me dios de transporte.

Solución

Los cuatro primeros términos de la sucesión serán:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = 2$$

Los términos siguientes serán:

$$a_5 = \frac{1}{5},\ a_6 = \frac{1}{6},\ a_7 = \frac{1}{7}\ \text{-----}$$

Así queda la sucesión

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\ \text{--------}$$

d) Mediante un conjunto de instrucciones que indican como se obtiene un término a partir de los anteriores. A esta forma de representar una sucesión se la conoce con el nombre de "ley de recurrencia".

Ejemplo

Expresar los primeros términos de la sucesión que viene dada por:

$$a_1 = a_2 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ para } n \geqslant 2$$

Solución

Conocemos los dos primeros términos de la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, los restantes términos se obtendrán como suma de los dos términos anteriores. Así:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

la sucesión quedará en la forma: 1, 1, 2, 3, 5, -----

Ejemplo

Expresar los primeros términos de una sucesión definida por: $a_1 = 2$ y cada uno de los términos siguientes se obtiene elevando al cuadrado el anterior.

Solución

Conocido $a_1 = 2$, el siguiente término $a_2 = a_1^2 = 4, a_3 = a_2^2 = 16 = a_3^2 = 256$.

Así la sucesión será: 2, 4, 16, 256 -----

También en ocasiones resulta conveniente encontrar el "término general" de una sucesión, conocidos algunos términos de ésta aunque esto no resulta muy fácil.

Ejemplo

Calcular el término general de la sucesión cuyos primeros términos son:

$$a_1 = \frac{2}{4},\ a_2 = \frac{3}{5} — a_3 = \frac{4}{6} \cdot a_4 = \frac{5}{7} \text{ -------}$$

Solución

Si observamos los distintos términos, el numerador es siempre una unidad mayor que el lugar que ocupa el término y el denominador a su vez es tres unidades mayor que el lugar que ocupa el término, luego podemos expresar el término general en la forma:

$$a_n = \frac{n + 1}{n + 3}$$

Ejemplo

Calcular el término general de la sucesión cuyos primeros términos son:

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = -\frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{5} \text{ ------}$$

Solución

Si observamos los distintos términos, el numerador es "1" solamente cambia el signo, lo podríamos expresar como $(— 1)^n$. El denominador quedaría en la forma n + 1 luego el término general sería:

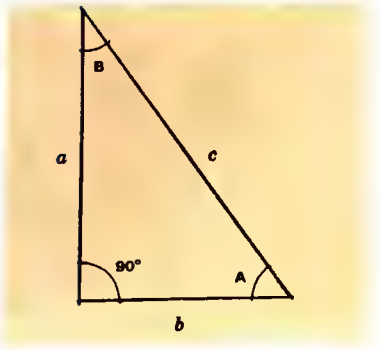
$$a_n = \frac{(— 1)^n}{n + 1}$$

7.—SUBSUCESIONES.

Dada una sucesión cualquiera S_n, llamamos subsucesión de ésta a un subconjunto de infinitos términos de S_{n_k}

Ejemplo

a) Dada una sucesión definida por el término general a_n entonces se tiene que el conjunto de los términos pares a_{2n} es una subsucesión. Igual ocurre para los términos impares, es decir, sucesión a_{2n-1} es una subsucesión de a_n.



EL PI-GRIEGO SE ELIMINA DEL CIELO

La trigonometría, el estudio de los triángulos, había servido, desde los tiempos de la antigua Babilonia hasta poco antes de Descartes, como una añadidura puramente práctica de la agrimensura, de la astronomía y de la navegación. Los astrónomos y los marineros, que recorrían el cielo o el mar, querían determinar a menudo distancias no mensurables con la regla o el metro. La trigonornetría les permitía ejecutar estas medidas aplicando simplernente ciertas reglas fundamentales basadas en las relaciones existentes entre los lados y los ángulos del triángulo, fuesen grandes o pequeños. Estas relaciones fueron formuladas inicialmente por los griegos para analizar los arcos del círculo, y el primer hombre en emplearlas fue el astrónomo Iparco, hacia el 140 a.C., para encontrar las distancias en línea recta a través de la cúpula celeste —un verdadero y propio intento de eliminar el pi griego del cielo. Hoy, las tres relaciones más usadas se refieren al triángulo rectángulo y se llaman seno (abreviadamente sen), coseno (cos) y tangente (tan). En el grafico puede observarse qué representan exactamente estas relaciones y como puede aplicarlas un hombre para abatir un árbol de su jardin sin destruir la casa.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Las relaciones representadas por seno, coseno y tangente de un ángulo cambian su valor numérico al variar las dimensiones del ángulo que representan. Los griegos calcularon algunos de estos valores y los recogieron en tablas trigonométricas que sucesivos matemáticos mejoraron y desarrollaron.

Estas tablas permanecieron, largo tiempo, como simple forma de matemática aplicada, un instrumento para navegantes celestes y terrestres, hasta que el famoso algebrista francés François Vieta, que precede en medio siglo a Descartes, hizo una observación fundamental. Comprendió que la relación trigonométrica podía usarse para resolver una ecuación algebraica: de hecho, una serie de números en una tabla puede representar los sucesivos valores tomados por una incógnita. La proposición «el seno del ángulo «x» e «y» puede también escribirse «y = sen x», ecuación semejante a la ecuación $y = x^2 + 7x$. En qué modo la intuición de Vieta alargó los fines de la trigonometría se hace hoy más evidente cuando aparece Descartes con su técnica de la representación gráfica. Una ecuación como y = sen x puede de hecho representarse gráficamente, punto por punto, para realizar una curva en el papel; se trata de una línea ondulada sin fin, el exacto equivalente gráfico de los reflujos de las mareas y del flujo de la corriente eléctrica en un cable de corriente alterna.

continúa en la página siguiente

b) Dada una sucesión definida por su término general

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{(n^2 + 1)}$$

. Determinar una subsucesión de ésta.

Solución

Los primeros términos de esta sucesión serán:

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{5},\ a_3 = -\frac{3}{10},\ \text{-----}$$

una subsucesión de ésta, sería tomar todos los términos que son negativos, — 1/2, — 3/10 que en este caso coinciden con los términos impares.

8. OPERACIONES CON SUCESIONES.

8.1.—Suma de sucesiones.

Se define la suma de las sucesiones a_n y b_n como la sucesión definida por $a_n + b_n$, cuyos términos son las suma de los términos de cada una de las sucesiones.

Ejemplo

Dadas dos sucesiones cuyos primeros términos son: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 11$, ----- y $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 6, b_4 = 8$, ----- Expresar los primeros términos de la sucesión suma.

Solución

Sumando cada uno de los términos tendremos que la sucesión suma será:

$$a_1 + b_1 = 3,\ a_2 + b_2 = 7,\ a_3 + b_3 = 13,$$
$$a_4 + b_4 = 19$$

Así la sucesión será: 3, 7, 13, 19, --------

Ejemplo

Hallar la sucesión suma $a_n + b_n$ siendo

$$a_n = \frac{n + 1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{n^2 - 3}{n - 1}$$

Solución

Hallando la suma de los términos generales de las dos sucesiones, obtenemos el término general de la sucesión suma.

$$a_n + b_n = \frac{n + 1}{n} + \frac{n^2 - 3}{n - 1} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-1) + (n^2-3)n}{n(n-1)} = \frac{n^2-1+n^3-3n}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{n^3+n^2-3n-1}{n(n-1)}$$

los primeros términos de esta sucesión serán:

$$a_1 + b_1 = -1,\ a_2 + b_2 = \frac{4}{3},\ a_3 + b_3 = \frac{13}{6},$$

$$a_4 + b_4 = \frac{67}{20} \text{ -----}$$

8.2.—Resta de sucesiones.

Definimos la resta de dos sucesiones a_n y b_n como una sucesión dada por $a_n - b_n$ donde cada miembro es la resta de los términos de cada una de las sucesiones.

Ejemplo

Calcular la sucesión resta de las sucesiones

$$a_n = \frac{n-1}{n} \text{ y } b_n = \frac{n^3 - n^2 + 3}{n^2}$$

Solución

El término general de la sucesión $a_n - b_n$ será

$$c_n = a_n - b_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n^3 - n^2 + 3}{n^2}$$

$$= \frac{(n-1)n - (n^3 - n^2 + 3)}{n^2} = \frac{n^2 - n - n^3 + n^2 - 3}{n^2} =$$

$$= \frac{-n^3 + 2n^2 - n - 3}{n^2}$$

los primeros términos de la sucesión serán

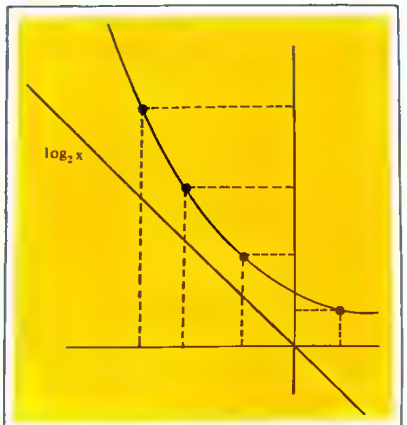
$$c_1 = -3,\ c_2 = -\frac{5}{4},\ c_3 = -\frac{15}{9},\ c_4 = -\frac{29}{16} \text{ -----}$$

8.3.—Multiplicación de sucesiones.

Se llama multiplicación de las sucesiones a la sucesión definida por $a_n \cdot b_n$, cuyos términos son el producto de cada uno de los términos de las sucesiones.

Ejemplo

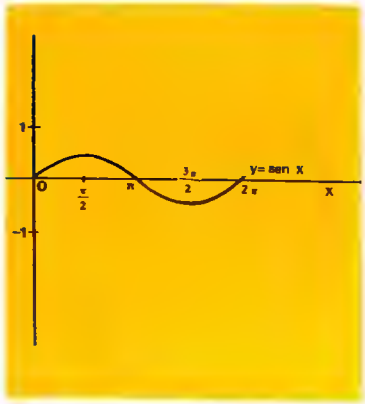
Dadas las sucesiones $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ y $b_n = \frac{n-2}{n^2+1}$ Calcular la sucesión producto.



Como había hecho con la trigonometría, el sistema cartesiano alcanzó y se hizo dueño de esa rama de la matemática conocida por todo estudiante con el nombre de «logaritmos». De la misma forma que en la trigonometría, los logaritmos se interesan también de las relaciones entre números. Un logaritmo es el «exponente» de un número e indica a qué potencia debe elevarse el número a fin de obtener otro número dado. Conociendo los logaritmos, cualquiera que deba hacer arduas multiplicaciones o divisiones puede ahorrarse un montón de ingrata aritmética; justamente era esta la meta del inventor de los logaritmos, John Napier, barón de Merchiston.

Este modesto e infatigable escocés concibió la idea de los logaritmos cuarenta años antes que Descartes publicase su *Método*. Tras más de 20 años de cálculos, Napier demostró sustancialmente que todo número, cualesquiera cifras contenga, puede expresarse en función del número 10 elevado a una potencia determinada. Igual que 100 es 10^2, así 56 es $10^{1,748\,19}$ y 23 es $10^{1,361\,73}$; además, sumando los exponentes de estas dos potencias de 10, se obtiene una nueva potencia de 10, $10^{3,t0992}$, que equivale a 1.228, es decir, 56 multiplicado por 23. Restando el menor de estos exponentes de 10 del mayor se obtiene $10^{0,38646}$ que equivale a 2,4348, es decir el número obtenido dividiendo 56 entre 23. Los matemáticos han enunciado todo esto en la denominada «Ley de los exponentes»: sumar los exponentes equivale a multiplicar, sustraer los exponentes equivale a dividir.

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

Napier dispuso sus cálculos logarítmicos en tablas prácticas que fueron empleadas por científicos y técnicos para resolver operaciones con muchas cifras. Naturalmente, para calcular 56 por 23 basta un trozo de papel y un lápiz o, como mucho, la ayuda de un instrumento abreviador de operaciones llamado regla calculadora, un aparato constituido por una pareja de listones graduados en escala logarítmica y unidos entre sí en forma de poder desplazarse uno sobre otro (véase dibujo). El noble instrumento de Napier manifiesta su importancia en largas operacionas, por ejemplo cuando un economista decide dividir el producto nacional bruto de los Estados Unidos en 1960, $ 503.443.000.000, entre la población en aquel año, 179.323.175 habitantes.

El desarrollo del sistema cartesiano hizo posible diseñar las curvas para las relaciones logarítmicas como y = log x, tan fácilmente como para razones trigonométricas como y = sen x. Permitiendo manifestarse estas ecuaciones, como las ecuaciones algebraicas, bajo forma da líneas y puntos visibles, los diagramas cartesianos capturaron y domaron las relaciones variablas entre cantidades intercohexas. De este triunfo, surge un concepto fundamental para las matemáticas superiores: la idea da «variable» y de «función».

continúa en la página siguiente

Solución

El término general de la sucesión producto será:

$$C_n = a_n \cdot b_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n-2}{n^2+1} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{(n+2)(n^2+1)} = \frac{n^2-2n+n-2}{n^3+n+2n^2+2} = \frac{n^2-n-2}{n^3+2n^2+n+2}$$

los primeros términos de la sucesión producto serán:

$$c_1 = -\frac{1}{3},\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{4}{51}\ \text{-------}$$

8.4.—División.

Se define el cociente de los sucesiones a_n y b_n como la sucesión definida $\frac{a_n}{b_n}$ tal que para cualquier valor de n, se tiene que $b_n \neq 0$

Ejemplo

Dadas las dos sucesiones $a_n = n + 1$ y $b_n = \frac{1}{n}$. Calcular el cociente de ambas sucesiones.

Solución

Para poder hacer el conciente tenemos que ver que ningún término de la sucesión b_n se anula: se verifica que para cualquier valor de n, $\frac{1}{n} \neq 0$ y por lo tanto no se anula.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{\frac{1}{n}} = (n+1)n$$

los primeros términos de la sucesión serán:

$$\frac{a_1}{b_1} = 2, \frac{a_2}{b_2} = 6, \frac{a_3}{b_3} = 12, \text{ ------}$$

Ejemplo

Dados $a_n = n^2$ y $b_n = \frac{n-3}{n-1}$. Calcular el cociente de ambas sucesiones.

Solución

Tenemos que comprobar primero que ningún término de b_n se anula. Como $b_n = \frac{n-3}{n+1}$ para $n=3$, $b_n = \frac{3-3}{3+1} = 0$, luego no podemos realizar el cociente de ambas sucesiones.

8.5.—Producto de una sucesión por un número real.

Dada una sucesión a_n y un número real "K" definimos la sucesión "$K \cdot a_n$", cuyos términos resultan de multiplicar cada término de la sucesión a_n por "k".

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \frac{n+2}{n}$. Hallar la sucesión definida por $5a_n = C_n$

Solución

El término general de la sucesión será $C_n = 5 \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{5n+10}{n}$

los primeros términos serán:

$$C_1 = 15, \quad C_2 = 10, \quad C_3 = \frac{25}{3}$$

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = 3^n$. Hallar la sucesión definida por $3 \cdot a_n = C_n$.

Solución

El término general de la sucesión C_n será

$$C_n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

los primeros términos serán:

$$C_1 = 3^2 = 9; \quad C_2 = 3^3 = 27; \quad C_3 = 3^4 = 81 \text{ -----}$$

8.6.—Potencia de exponente un número.

Dada una sucesión a_n y un número real K se define la sucesión $(a_n)^k$; cuyos términos resultan de elevar a K cada uno de los términos de la sucesión a_n.

Ejemplo

Dada la sucesión definida por $a_n = \frac{1}{n}$. Hallar la sucesión $(a_n)^2 = c_n$.

Solución

El término general será $C_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2$ Los primeros términos serán $c_1 = (\frac{1}{1})^2 = 1; c_2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}; \; c_3 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}; \ldots$

viene de la página anterior

Si una «x» y una «y» pueden relacionarse mediante una ecuación o un diagrama, son denominadas «variables» en cuanto que a una variación de valor de una corresponde una variación en el valor de la otra. Entre ambas existe la llamada relación funcional, y la variable cuyas variaciones de valor son el resultado de las variaciones de valor de la otra denominó «función» de este variable.

Un seno, un coseno y una tangente de un ángulo son funcionas de este ángulo; del mismo modo, un logaritmo es una función del número que representa. En las ecuaciones algebraicas ordinarias, «y» es función de «x» si los valores de «y» cambian al variar de valor «x».

Aun cuando la idea de variable y de función puede parecer abstracta a quien no sea un matemático, está presente por todas partes. Si puede demostrarse que la humedad del aire es influenciada por la temperatura, significa que es función de la temperatura. La presión sanguinea de un industrial, que aumenta cada cumpleaños, es una función de su edad. El camino recorrido por un automóvil es una función del tiempo transcurrido y de la velocidad de la conducción.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Además de poner en marcha el concepto de variable y función y de abrir horizontes más amplios para sucesivos descubrimientos matemáticos, las principales contribuciones del sistema cartesiano a la matemática fueron esencialmente de naturaleza filosófica. Permitiendo un gran intercambio de puntos de vista, aquel dió origen a esa libertad matemática, denominada «análisis», que comprendía en su seno gran parte de las matemáticas conocidas hasta los tiempos de Descartes. Un algebrista que proceda en uno de sus más abstractos pasaos y que en un cierto punto dude de la dirección a tomar, puede trazar las curvas que representen sus ecuaciones y mediante éstas conocer las incógnitas. Igualmente, un astudioso de geomatría puede concatenar sus largos razonamientos más velozmente manipulando sus curvas en forma de ecuaciones.

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2+n}$. Hallar la sucesión definida por: $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^3 = C_n$

Solución:

Primero calculamos el cociente de las dos sucesiones

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/n}{1/n^2+n} = \frac{n^2 + n}{n}$$

Sacando factor común n en el numerador:

$$\frac{n^2 + n}{n} = \frac{n(n + 1)}{n} = (n + 1)$$

Por tanto el término general de C_n será:

$$C_n = \frac{1}{3}(n + 1)^3$$

los primeros términos serán:

$$C_1 = \frac{1}{3} 2^3 = \frac{8}{3}; \; C_2 = \frac{1}{3} 3^3 = 9;$$

$$C_3 = \frac{1}{3} 4^3 = \frac{64}{3} \text{ ------}$$

8.7.—Potencia de exponente una sucesión.

Dadas dos sucesiones de números reales a_n y b_n podemos definir la sucesión $(a_n)^{b_n}$, cuyos términos resultan de elevar cada término de la sucesión a_n por el término correspondiente de la sucesión b_n.

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = -n$. Hallar la sucesión definida pr $(a_n)^{b_n} = C_n$.

Solución

El término general C_n será

$$C_n = (n)^{-n}$$

los primeros exponentes serán

$$= 1^{-1} = 1; \; C_2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}; \; C_3 = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ ----}$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = 2^{n+1}$ y $b_n = 3^{n-1}$. Hallar la sucesión definida por: $\frac{1}{3}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = C_n$

Solución

Primero calculamos el cociente $\frac{a_n}{b_n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$$

El término general C_n será igual:

$$C_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\right)^n = \frac{1}{3}\,\frac{2^{(n+1)n}}{3^{(n-1)n}}$$

Aplicando las propiedades de las potencias:

$$C_n = \frac{2^{(n+1)n}}{3^{(n-1)\,n+1}}$$

los primeros términos serán:

$$C_1 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3};\ C_2 = \frac{2^6}{3^3} = \frac{64}{27};\ C_3 = \frac{2^{12}}{3^7} = \frac{1024}{2187}$$

Ejemplo:

Dadas dos sucesiones $a_n = \frac{1}{n^2}$, y, $b_n = n + 1$. Hallar la sucesión definida por: $3\,(a_n \cdot b_n)^{-1/2} = C_n$

Solución

Primero calculamos el producto de las sucesiones a_n y b_n:

$$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n^2} \cdot (n + 1) = \frac{n + 1}{n^2}$$

El término general C_n será:

$$C_n = 3 \cdot \left(\frac{n + 1}{n^2}\right)^{-1/2}$$

Aplicando propiedades de las potencias:

$$C_n = 3 \cdot \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{1/2} = \frac{3(n^2)^{1/2}}{(n+1)^{1/2}} = \frac{3n}{\sqrt{n+1}}$$

LAS RUEDAS GIRAN

Las siete ruedas dispuestas en torno al pequeño engranaje darán la impresión de girar en sentido horario, si se toma el libro con las dos manos y se le imprime un movimiento de rotación hacia la izquierda de unos sesenta centímetros. Al mismo tiempo, el observador tendrá la ilusión de que el engranaje central efectivamente gire, lentamente, hacia la izquierda.

EL EFECTO DE DESVIACION DE CORIOLIS

En el siglo XIX Gustave-Gaspard de Coriolis, matemático francés, observó que un objato que se mueva sobre una superficie rotatoria se desvía hacia la derecha o hacia la izquierda según el sentido de la rotación. Similarmente, ya que la Tierra rota hacia el este, todos los objetos en movimiento que se encuentran en el hemisferio Norta, tiendan a rotar hacia el esta. Un avión qua en los Estados Unidos volase desde la costa del Pacífico hacia la costa atlántica —si el llamado efecto de Coriolis no se compensasa— mientras que la Tiarra gira bajo aquel, aterrizaría en Sudamérica. Incluso vientos no desviados por la rotación de la Tierra an lugar de soplar exactamante de norte o de sur son prevalentemente vientos de levante o de poniente.

continúa en la página siguiente

los primeros términos serán:

$$C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}};\ C_2 = \frac{6}{\sqrt{3}};\ C_3 = \frac{9}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2} \text{ -----}$$

9.—SUCESIONES MONOTONAS.

Las sucesiones monótonas pueden ser:

a) crecientes
b) decrecientes
c) no crecientes.
d) no decrecientes.
e) constante.

a) Una sucesión a_n es monótona creciente cuando se verifica que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in N - \{0\}$

Para comprobar que una sucesión sea monótona creciente. tendremos que ver por tanto que:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \text{ para todo } n \in N - \{0\}$$

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \frac{2n-1}{2}$. Comprobar que es una sucesión monótona creciente.

Solución

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{2} - \frac{2n-1}{2}$$

$$= \frac{2n+2-1-2n+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

luego vemos que $a_{n+1} - a_n > 0$, la sucesión será por tanto una sucesión monótona creciente.

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = 2^{n-1}$ es monótona creciente.

Solución

Tenemos que comprobar que $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = 2^{(n+1)-1} - 2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1}$$

Sacando factor común a 2^{n-1}

$a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} > 0$ para cualquier alor de n.

b) Sucesión monótona decreciente.—

Una sucesión a_n es monótona decreciente cuando se verifica que $a_n > a_{n+1}$ para cualquier $n \in N - \{0\}$, es decir, cuando cada término de la sucesión es mayor que el siguiente.

Para comprobar que una sucesión sea monótona decreciente se tendrá que verificar que $a_n - a_{n+1} > 0$ para cualquier $n \in N - \{0\}$

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = \frac{1}{n+1}$ es monótona decreciente.

Solución

Tendremos que comprobar que $a_n - a_{n+1} > 0$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{+1}{(n+1)(n+2)}$$

El numerador es positivo, el denominador es el producto de dos números positivos que será positivo para cualquier valor de n por tanto $a_n - a_{n+1} > 0$ para $n \in N - \{0\}$

Ejemplo

Comprobar si son monótonas las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ y } b_n = \frac{2^n}{n}$$

Solución

1.—Si estudiamos los primeros términos de la sucesión a_n :

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1;\ a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2};\ a_3 = \frac{(-1)^3}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3};\ a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4};\ a_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5} \cdots$$

Se comprueba que esta sucesión no es monótona ni creciente ni decreciente, ya que no existe una misma desigualdad entre cada dos términos consecutivos de la sucesión. En cambio si estudiamos la subsucesión de los términos pares a_{2n} y la subsucesión

viene de la página anterior

El efecto Coriolis puede observarse con un tocadiscos, un disco de cartón con el mapa del hemisferio norte dibujado, un lapidero y una regla. 1. Con el polo puesto sobre el eje de rotación de tocadiscos, el mapa rueda en sentido antihorario, que es el de rotación de la Tierra en el hemisferio norte. Una línea, trazada con la ayuda de una regla, resulta un arco a causa del plano rotatorio. 2. Una serie de líneas trazadas desde el polo (sobre el eje de rotación) al ecuador (borde) resultan sistemáticamente curvas hacia la derecha, esto es, hacia el oeste. Igualmente, la rotación de la Tierra desvía los vientos dirigidos hacia el sur, esto es, aquéllos de los trópicos y de los polos plegándoles hacia el oeste. 3. Este rápido movimiento hacia el oeste de las masas de aire tropical y polar resulta invertido en los vientos de latitudes medias. En esta región, por tanto, el aire que debería ir hacia el norte por el efecto Coriolis es desviada por un flujo hacia el este.

EL MISTERIO DE LA ESTRELLA OCULTA

Confundida en el mosaico, hay una astrella simétrica de cinco puntas. Para resolver el enigma es necesario emplaar la reflexión y oponerla a las mil y una distracciones visivas.

SOLUCION EN LA PAG. 1088

de los términos impares a_{2n-1}, se comprueba que son monótonas

Si llamamos $\alpha_n = a_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n} = \dfrac{1}{2n}$

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1) - 2 \cdot n}{4 \cdot n\,(n+1)} =$$

$$= \frac{2}{4n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} > 0 \text{ para } n \in N - \{0\}$$

luego la subsucesión a_{2n} es monótona decreciente.

Si llamamos $\beta_n = a_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \dfrac{-1}{2n-1}$

$$\beta_n - \beta_{n+1} = \frac{-1}{2n-1} - \frac{(-1)}{2(n+1)-1} =$$

$$= \frac{-1}{2n-1} - \frac{(-1)}{2n+1} =$$

$$= \frac{-2n - 1 + 2n - 1}{4n^2 - 1} = \frac{-2}{4n^2 - 1}$$

por tanto se verifica que $\beta_n - \beta_{n+1} < 0$ para $n \in N - \{0\}$. Entonces la subsucesión a_{2n-1} es monótona creciente.

c) Sucesión no creciente.

Decimos que una sucesión a_n es no creciente cuando $\forall n\ a_n \leq a_{n+1}$

d) Sucesión no decreciente

Decimos que una sucesión a_n es no decreciente cuando

$$\forall n,\ a_n \geq a_{n+1}$$

e) Sucesión constante

Decimos que una sucesión a_n es constante cuando $\forall n$

$$a_n = a_{n+1} = a$$

10.—SUCESIONES ACOTADAS.

Vamos a definir dos formas de acotación.

a) Una sucesión a_n de números reales decimos que está acotada superiormente si existe un número real α tal que $a_n \leq \alpha$ para todo $n \in N - \{0\}$. Al número "α" se dice que es la "cota superior de la sucesión a_n.

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$ está acotada superiormente.

Solución

Estudiamos los primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = \frac{2}{1} = 2;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{4}{3};\ a_4 = \frac{5}{4}$$

se comprueba que todos los términos de la sucesión son menores que 3. Entonces "3" será una cota superior de a_n

NOTA.— Toda sucesión a_n monótona decreciente está acotada superiormente por el primer término de la sucesión a_1.

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$ está acotada superiormente.

Solución

Vamos a comprobar que esta sucesión es monótona decreciente.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{2n+3}{n+1} -$$

$$- \frac{2n+5}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2)-(2n+5)(n+1)}{(n+1)(n-2)}$$

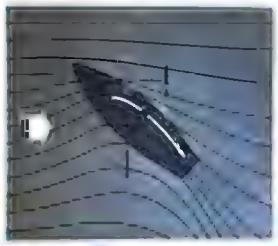
Operando en el numerador tenemos

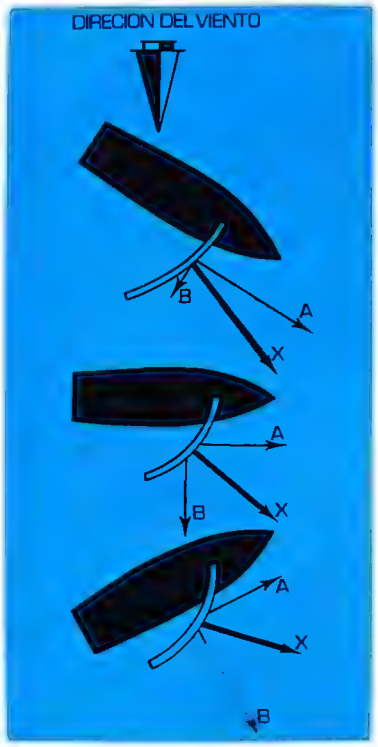
$$\frac{2n^2+3n+4n+6-2n^2-5n-2n-5}{(n+1)(n+2)} = \frac{+1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

para cualquier $n \in N - \{0\}$

Entonces a_n es una sucesión estrictamente decreciente. Luego $a_1 = \frac{5}{2}$ será una cota superior, ya que todos los demás términos serán más pequeños que $\frac{5}{2}$

b) Una sucesión a_n de números reales está acotada inferiormente si existe un número real β tal que $a_n \geq \beta$ para todo valor de $n \in N - \{0\}$. Al número "β" se dice que es la "cota inferior" de la sucesión a_n.





LA AERODINAMICA

Estas figuras muestran como intervienen las leyes de la aerodinámica cuando una vela transforma la fuerza del viento en fuerza de avance. La fuerza (X) del viento es descompuesta por las velas en sus componentes, que varían con cada cambio de ruta. Procadiendo con viento de popa, la componante predominanta es la fuerza de avance (A). En cambio, cuando la embarcación forma un cierto ángulo con la diracción del viento, A disminuye mientras qua aumenta la otra componanta (B) que tiande a hacer ladearse el casco. La figura da la darecha explica cómo una vela pueda empujar hacia adelante una barca con el viento en contra. Su curvatura obliga al viento a raalizar un recorrido mayor; ello crea una difarencia de prasión sobre las dos caras de la vala, da la qua se ganera la fuerza mayor de avance.

ARQUIMEDES

MATEMATICO y físico griego. Nació en Siracusa en el 287 a. de C. y murió en el 212 a. de C. Discípulo predilecto da Euclides. Hizo un estudio del movimiento de los astros. La frase que todavía perdura de «¡EUREKA, EUREKA!» se debe a él.

Encontrábase Arquímedes en el baño, y descubrió la pérdida de peso que experimenta un cuerpo al ser sumergido en un líquido.

Estudió límites alrededor del número π para calcular la superficie y volumen. Centros de gravedad, ley de palanca y sus cálculos integrales fueron de una perfección qua aún hoy se consideran (al menos los dos primeros) como definitivos. Dascubrió multitud de cálculos exactos de matemáticas que, aplicados a su gran afición por la mecánica, realizó la construcción de armas de guerra.

Siracusa encontrábase sitiada por naves romanas, y Arquímedes, con la sola ayuda de unos grandes cristales, espejos curvos donde hacía incidir los rayos solares, incendió dichos navíos. Fue uno de los más grandes espectáculos que jamás vio la historia, en que un hombre solo desarboló e incendió todas las naves enemigas. Después, unas grandes catapultas, lanzando rocas de grandes dimensiones, los hundía totalmente. Así los tuvo cerca de tres años.

Cuando al fin los romanos tomaron la ciudad, observaron que su enemigo Arquímedes se encontraba en el jardín realizando cálculos matemáticos. «Quitadme la vida, pero no destruyáis mi obra», fueron sus últimas palabras, ya que allí mismo le dieron muerte.

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \frac{n^2-1}{2n+1}$. Comprobar que está acotada inferiormente.

Solución

Los primeros términos de la sucesión serán:

$$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{3}{5},\ a_3 = \frac{8}{7},\ a_4 = \frac{15}{9} \text{ ------}$$

Como podemos observar, todos los términos de la sucesión son mayores que — 1. Por tanto — 1 será una cota inferior de la sucesión a_n.

NOTA.— Toda sucesión a_n monótona creciente está acotada inferiormente por su primer término a_1.

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Comprobar que está acotada inferiormente.

Solución

Primeramente vamos a comprobar que esta sucesión es monótona creciente.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2\cdot n}{n+1} - \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} =$$

$$= \frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+2} = \frac{2n(n+2)-(2n+2)(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{2n^2+4n-2n^2-2n-2n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0$$

para cualquier valor $n \in N - \{0\}$

Al ser la sucesión a_n creciente, su primer término $a_1 = 1$ es una cota inferior, ya que todos los demás términos serán cada vez mayores

Definición

Una sucesión a_n de números reales se dice que está acotada cuando lo está superior e inferiormente, es decir, cuando existen dos números reales α y β tal que $\beta \leqslant a_n \leqslant \alpha$ para cualquier $n \in N - \{0\}$ es decir si $\exists\ k > 0$ real $/ |a_n| \leq k$.

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ está acotada.

Solución

Primeramente vamos a ver, si la sucesión a_n es monótona:

$$a_n - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{(n+1)+1} =$$

$$= \frac{n(n+2)-(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \text{ para } n \in N - \{0\}$$

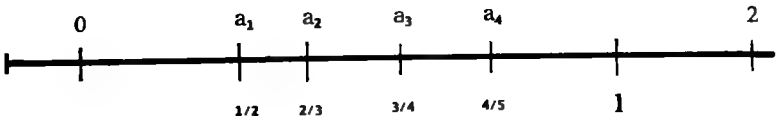
por tanto a_n es monótona creciente. Por lo visto anteriormente $a_1 = \frac{1}{2}$ es una cota inferior de la sucesión.

Nos falta por encontrar una cota superior para que a_n esté acotada.

Si escribimos los primeros términos

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5}\text{----}$$

se puede comprobar que todos los términos va a ser menores que 2, luego el "2" será una cota superior.



Entonces se tiene que $\frac{1}{2} \leq a_n < 2$ para $n \in N - \{0\}$

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n+2}$

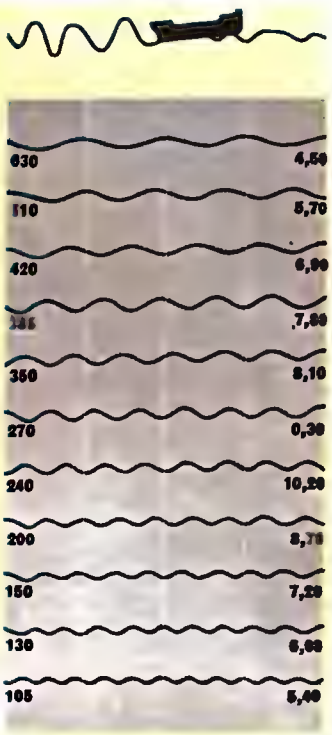
Comprobar que "0" es una cota inferior de a_n y "1" es una cota superior.

Solución

Para comprobar que "0" es una cota inferior se tendrá verificar la siguiente desigualdad: $a_n \geq 0$ para $n \in N - \{0\}$

Efectivamente se comprueba que $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+2} \geq 0$ para cualquier n ya que el denominador es siempre un número positivo y el numerador $\sqrt{n^2-1}$ es > 0 excepto para $n = 1$ que es igual a "0".

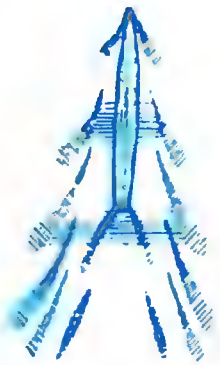
Para comprobar que "1" es cota superior vamos a ver que la siguiente desigualdad es cierta



El comportamiento de las olas marinas es irregular (arriba) pero, si se analizan con un ordenador, pueden descomponerse en sus muchas olas componentes. Puesto que cada una de estas olas puede medirse, puede trazarse también una representación matemática de las mismas para describir con precisión cuál es el comportamiento del mar.

FORMA DE LAS OLAS

Una ola oceánica está formada por el movimiento de infinitas partículas de agua que se desplazan con movimientos circulares por encima y por debajo de la superficie del mar. Este diagrama muestra el movimiento en sentido horario de 13 de esas partículas a través del perfil de una ola que procede de izquierda a derecha. Tal movimiento y las posiciones orbitales, en cada instante, originan la forma de la ola.



ESTUDIO SOBRE LAS OLAS

Un estudio sobre las olas producidas por una embarcación fue realizado por William Froude, empleando modelos (arriba) para preveer el comportamiento de naves a tamaño natural. Froude, estudiando la resistencia ofrecida a una nave por las olas generadas por la nave misma, descubrió, con la ayuda de modelitos con la misma forma pero a diferentes escalas, que una pequeña embarcación navegando lentamente produce, proporcionalmente, olas del mismo tipo que una embarcación mayor y más veloz.

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+2} \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{n^2-1} \leq n+2$$

Al ser ambos miembros de la desigualdad mayores o iguales a "0" podemos elevarlos al cuadrado sin que cambie el sentido de la desigualdad.

$$n^2 - 1 \leqslant (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$$

simplificando

$$0 \leqslant 4n + 5$$

y esta desigualdad es cierta para cualquier valor de $n \in N - \{0\}$. Por tanto tenemos que la sucesión a_n está acotada:

$$\boxed{0 \leqslant a_n < 1}$$

11.—SUCESIONES DE CAUCHY.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales se dice que $\{a_n\}$ es de Cauchy, si y sólo si $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0(\epsilon) / \forall n, y \; n \in N \; m, n \geq n_0(\epsilon) \; |a_m - a_n| < \epsilon$.

También podemos definirla como:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, n_0(\epsilon) \; \forall n \geq n_0 \; y \; \forall k \geq 1 \; |a_{n+k} - a_n| < \epsilon$$

Nos permite decir que una sucesión es convergente sin tener su límite.

Teorema:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, entonces podemos decir que:

$$\{a_n\} \text{ es convergente} \Leftrightarrow \{a_n\} \text{ es de Cauchy}$$

Demostramos la doble implicación en ambos sentidos.

- si es convergente $\Rightarrow$ es de Cauchy

Tenemos la sucesión $\{a_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0(\epsilon) \; \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Tomaremos un n_0 diferente: $n_0 \left(\frac{\epsilon}{2}\right)$

$$n \geq n_0 (\epsilon/2) \qquad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n_1 \geq n_0(\epsilon/2) \quad |a_m - a| < \epsilon/2$$

Entonces

$$n \geq n_0(\epsilon/2) \quad |a_n - a| < \epsilon/2$$

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq$$

$$\leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por lo tanto $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0(\epsilon)\ \forall m$ y $n \in N$ m, $n \geq n_0(\epsilon)$

$|a_m - a_n| < \epsilon$. Como queríamos demostrar.

- En el otro sentido de la implicación.

$\{a_n\}$ es de Cauchy $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ es convergente.

Para demostrarlo:

1º) Probamos que $\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow$ es acotada.

2º) Si $\{a_n\}$ es acotada (por Bolzano-Weierstrass) existe $\{a'_n\}$ que es una subsucesión:

$$\lim_{n \to \infty} a'_n = a'$$

3º) Entonces $\lim_{n \to \infty} a'_n = a'$; $\{a_n\}$ es convergente.

Toda sucesión de Cauchy es convergente. El conjunto que cumple esta propiedad se dice que es un conjunto completo. El conjunto de los números reales es un conjunto completo. Sin embargo el conjunto de los números racionales no lo es.

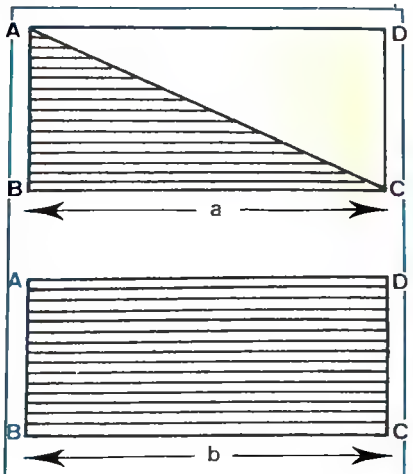
12.—SUCESIONES CONVERGENTES DE NUMEROS REALES. LIMITE DE UNA SUCESION DE NUMEROS REALES.

El número real "ℓ" es el límite de la sucesión a_n cuando para cualquier número $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|a_n - \ell| < \varepsilon$
Representamos esto por

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

Intuitivamente la definición nos dice que si tomamos un entorno del punto "ℓ" con un radio cualquiera ε, todos los términos de la sucesión a partir de un término a_{n_0} están dentro de este entorno.

na sucesión de números reales que tiene límite dentro del conjunto R se dice que es convergente.



LOS INDIVISIBLES

Para calcular áreas y volúmenes se emplean se emplean métodos de integración más o menos complejos y que resultan muy interesantes.

Este es el caso de los «indivisibles» de Cavalieri en base a los cuales desarrolló un método de integración.

El término indivisible proviene de la filosofía escolástica y designa a partes de un ente continuo siendo dichas partes de menor dimensión de aquel al que pertenecen.

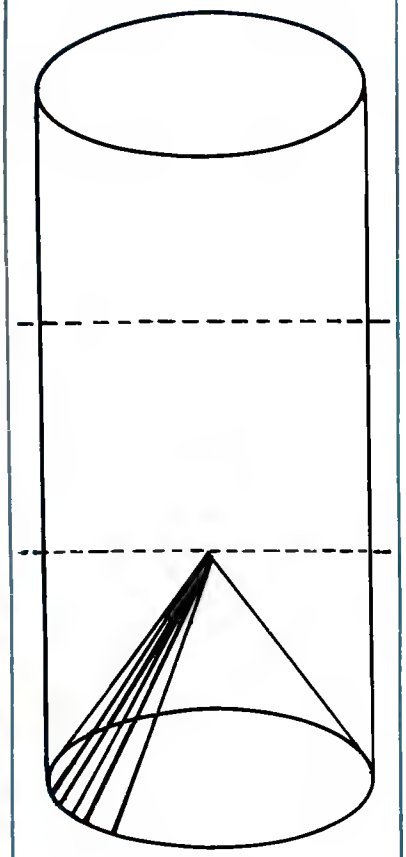
Cavalieri en realidad no profundizó tanto en este concepto sino que lo empleó para expresar de algún modo a los elementos de figuras que le permiten calcular áreas o volúmenes.

Geométricamente para una línea su indivisible es un punto y análogamente para una figura plana la será una línea.

En el caso de un paralelogramo ABCD deberíamos considerar un triángulo ABC que estaría lleno de n segmentos variables en tanto que para el paralelogramo tendríamos n segmentos b. Como el triángulo ABC ocupa $\frac{1}{2}$ de la superficie de ABCD

$$\sum_{1}^{n} a = \frac{1}{2} n c$$

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

Si realizamos consideraciones análogas con otros segmentos paralelos a otros triángulos trazados dentro de ABCD podríamos llegar a una expresión general:

$$\sum a^m = \frac{nb^m}{m+1}$$

donde n indica la relación entre las figuras con las que trabajamos, por ejemplo para un cono y un cilindro de igual base donde la altura del cilíndro es 3 veces mayor tendremos que:

$$\sum a^2 = \frac{1}{3} nb^2$$

Si consideramos los incrementos de b dividido entre n, el número de segmentos b:

$\frac{\Delta b}{n}$ y lo multiplicamos por la expresión anterior y pasamos al límite para un número de segmentos b pasarlamos a lo que en la matemática de hoy es una integral.

Ejemplo

Comprobar que el límite de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es cero.

Solución

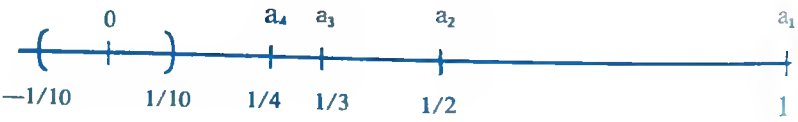
Si escribimos los primeros términos de la sucesión tenemos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4} \text{ ---}$$

Cada vez los términos se van haciendo más pequeños luego tienden a 0, por tanto su límite será "0"

Aplicando la definición, si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{10}$, a partir del $a_{11} = \frac{1}{11}$, todos los términos están a una distancia del cero menor que $\frac{1}{10}$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon = \frac{1}{10} \text{ para todo } n \geqslant 11$$



Ejemplo

Comprobar si la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$ es convergente.

Solución

Si escribimos los primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = \frac{-1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{-3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5},\ a_5 = \frac{-5}{6},\ a_6 = \frac{6}{7} \text{ ---}$$

observamos que los términos impares: $a_1 = \frac{-1}{2}$, $a_3 = \frac{-3}{4}$, $a_5 = \frac{-5}{6}$ ----- tienden a "—1" y los términos pares $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_4 \frac{4}{5}$, $a_6 = \frac{6}{7}$ tienden a "1". Resulta que la sucesión no es

convergente, ya que de serlo tendría que ocurrir que todos los términos se acercaran a un solo número que sería el límite.

A los puntos —1 y 1 los llamamos puntos de aglomeración o acumulación.

NOTA.— Decimos que un punto "p" es un punto de acumulación de la sucesión si existen infinitos términos de la sucesión tan próximos a "p" como queramos.

13.—SUCESIONES DIVERGENTES.

Una sucesión se llama divergente cuando tiende a ∞ ó $-\infty$

$$a_n \to +\infty \iff \{ \forall K \; \exists n_o \text{ (natural)} \; / \; n > n_o \Rightarrow a_n > K \}$$

$$a_n \to -\infty \iff \{ \forall K \; \exists n_o \text{ (natural)} \; / \; n > n_o \Rightarrow a_n < K \}$$

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = n + n(-1)^n$ es divergente.

Solución

Si expresamos los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = 0,\ a_2 = 4,\ a_3 = 0,\ a_4 = 8,\ \text{------}$$

Vemos que esta sucesión no tiene límite pues, aunque los términos impares formen una sucesión constante "0", los términos pares no tienden hacia ningún número. El punto cero sería un punto de acumulación.

Vamos a ver varias formas de sucesiones divergentes

a) Se dice que la sucesión a_n diverge hacia $+\infty$ cuando no está acotada superiormente es decir, sus términos, pueden ser tan grandes como queramos.

Se expresa del siguiente modo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = n^2 + 1$ diverge hacia $+\infty$

Solución

Si expresamos los primeros términos:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 10,\ a_4 = 17\text{----}$$

LA RECETA DE CARDANO

Todos conocemos el viejo mito de que las brujas vuelan, pues bien no es algo que sólo crean los niños y que aparece en dibujos y grabados de los cuentos o incluso en grabados de Goya.

El vuelo de las brujas ha preocupado a todos desde antiguo.

Se decía que sus «viajes» no eran sino consecuencia de ciertos ungüentos y hierbas que se untaban y que eran en realidad alucinógenos que producían tal sensación a los que las ingerían.

Gerolamo Cardano, matemático del siglo XVI también parecía interesado en el vuelo de las brujas y en la obra que titula De subtilitate recoge una receta que le dió una hechicera a base de cizaña, beleño, cicuta, adormidera roja y negra, lechuga y verdolaga. Con estos ingredientes se confeccionaba un aceite al mezclarlo con opio y cuyos efectos con una dosis de algo menos de dos gramos eran de un profundo sueño de dos horas.

observamos que cada vez los términos van siendo mayores y no los podemos acotar por ningún número. Por tanto

$$\lim_{n \to \infty} n^2 + 1 = + \infty$$

b) Se dice que la sucesión a_n diverge hacia $- \infty$ cuando no está acotada inferiormente, es decir, los términos son cada vez menores

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = n - n^2$ es divergente hacia $- \infty$.

Solución

Si expresamos los primeros términos

$$a_1 = 0,\ a_2 = -2,\ a_3 = -6,\ a_4 = -12 \text{ ----}$$

Observamos que los términos cada vez son más pequeños, por tanto se tiene

$$\lim_{n \to \infty} n - n^2 = - \infty$$

c)sucesión oscilante es aquella que no tiene límite finito ni infinito

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = (-1)^n \cdot n$ es oscilante.

Solución

Los primeros términos serán:

$$a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -3,\ a_4 = 4, \text{----}$$

observamos que los términos impares tienden hacia $- \infty$ y los términos pares tienden a $+ \infty$, luego será una sucesión oscilante, ya que la sucesión en su conjunto no tiene límite ni hacia $+ \infty$ ni hacia $- \infty$.

14.—PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES DE NUMEROS REALES.

a) Si una sucesión a_n tiene límite, éste es único.

HERON

LAMADO el «Viejo de Alejandría», fue un matemático griego, nacido sobre el siglo I a. de J.C.

Entre sus inventos destacan la máquina llamada fuente de Heron, un aparato en el cual se obtiene un surtidor por comprensión del aire y del agua. Junto con la Eolipila, se emplearon sobre todo como distracción de espectadores.

En su tratado de mecánica «La Neumática» hace una descripción técnicamente precisa del órgano hidráulico.

«La dióptrica» explica el uso de este aparato de nivelación que se usó como teodolito durante siglos para observaciones terrestres y astronómicas. En esta obra también se describe el «odómetro» que registra automáticamente las distancias recorridas en un vehículo.

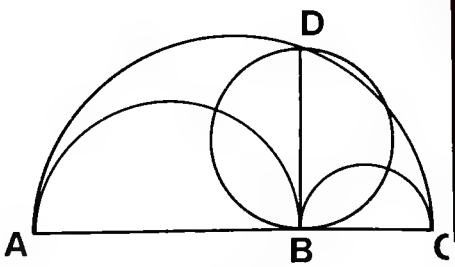
Creó un «Catóptrico», aparato óptico para estudiar los fenómenos de reflexión de la luz en los espejos planos, cóncavos y convexos. Demostró qúe la luz sigue el camino más corto y estableció la ley fundamental de la reflexión, demostrando la igualdad del ángulo de reflexión con el de incidencia.

La unicidad del límite podemos demostrarla suponiendo una sucesión a_n donde.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

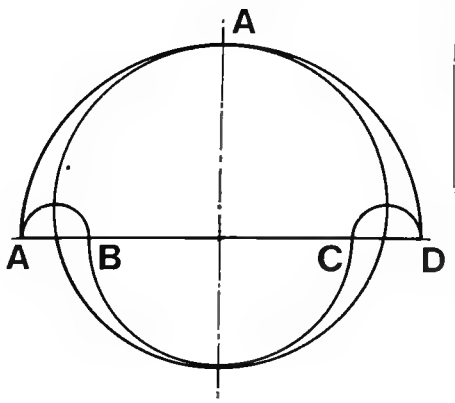
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b$$

Tenemos que demostrar que $a = b$



$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ n_0(\epsilon) \in N\ \forall n \geq n_0(\epsilon) |a_n - a| < \epsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ n_0'(\epsilon) \in N\ \forall n \geq n_0'(\epsilon) |a_n - b| < \epsilon$$



Vamos a tomar $n_0(\epsilon/2)$ y $n_0'(\epsilon/2)$

$$n_0(\epsilon/2) \rightarrow \forall n \geq n_0(\epsilon/2) |a_n - a| < \epsilon/2$$

$$n_0'(\epsilon/2) \rightarrow \forall n \geq n_0'(\epsilon/2) |a_n - b| < \epsilon/2$$

Tomaremos ahora un nuevo $n_0''(\epsilon/2)$

$$n_0''(\epsilon/2) = \text{máx.}\ \{n_0(\epsilon/2), n_0'(\epsilon/2)\}$$

escogemos el valor máximo para que se siga verificando que las expresiones en valor absoluto sean menores que el ϵ correspondiente a $n_0''(\epsilon/2)$:

$$\forall n > n_0''(\epsilon/2) \begin{cases} |a_n - a| < \epsilon/2 \\ |a_n - b| < \epsilon/2 \end{cases} \left| |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq \right.$$

$$\leq \underbrace{|a - a_n|}_{<\epsilon/2} + \underbrace{|a_n - b|}_{<\epsilon/2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

por lo tanto $|a - b| < \epsilon$,

es decir es tan pequeño como queramos y por tanto $a = b$

b) Toda sucesión monótona, que sea acotada tiene límite.

c) Toda sucesión convergente está acotada

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$. Comprobar que tiene límite.

Solución

Vamos a ver primero que es sucesión monótona.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} =$$

Arquímedes dedujo algunas aplicaciones de álgebre geométrica a los círculos. Si tenemos un semicírculo de diámetro AC y en este un punto interior B, si se trazan los semicírculos de diámetros AB y BC, el recinto limitado por los tres semicírculos, lo designa Arquímedes como «arbelos», es equivalente al círculo que tiene por diámetro la semicuerda BD, tangente común a los semicírculos anteriores.

Otro recinto de contornos semicirculares es el «salinon» partiendo de cuatro puntos A, B, C, D tales que AB = CD y al dibujar en un semiplano los semicírculos AD, AB, CD y en el otro BC. Demostró que el recinto ABCDA es equivalente al círculo comprendido entre los semicírculos de diámetro AD y BC.

Los casos del «arbelos» y «salinon» son casos particulares de la equivalencia entre recintos bordeados por cuatro semicircunferencias y un círculo que tiene por diámetro el segmento de eje radical de un par de circunferencias comprendido entre los arcos de las otras dos.

UN CALCULO LEONARDESCO

La mente del hombre, sacudida por las maravillas del Renacimiento, comenzó a comprender la vital importancia que la máquina tendría en el futuro. Traduciendo en dinero la fabulosa promesa contenida en la máquina para la producción de agujas de coser de su invención, Leonardo da Vinci anotaba en su diario: «Mañana, 2 de enero de 1496, temprano, haré un experimento. Cien veces cada hora se realizarán 400 agujas, es decir 40.000 agujas por hora, esto es 480.000 en 12 horas. Supongamos que fuesen 4000 millares que, a 5 soldos el millar, hacen 20.000 soldos: 1.000 liras por jornada y, si se trabaja 20 días al mes, 60.000 ducados al año».

Hacia finales del siglo XVI, un inglés, William Lee, ideó una máquina para tejer que hacía entre 1.000 y 1.500 puntos por minuto, siendo, en cambio, la tejedora más veloz solo capaz de tejer a mano 100 puntos. Había llegado la hora fatal de un arte traspasado de padres a hijos durante generaciones de artesanos textiles. Y he aquí que no solo en Inglaterra, sino en toda Europa, explotó una lucha feroz, pero desigual, entre seres humanos y los odiados monstruos mecánicos. En 1.596, un sicario pagado por el

continúa en la página siguiente

$$= \frac{(n+1)^2+1-(n^2+1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{n^2+2n+1+1-n^2-1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} =$$

$$\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

se verifica que para cualquier $n \in N - \{0\}$ el numerador y el denominador son positivos, por tanto el cociente de ambos será positivo:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} > 0$$

luego $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ es monótona decreciente

Además esta sucesión está acotada, siendo la cota superior el término de la sucesión.

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Para calcular la cota inferior nos fijamos en los primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{5},\ a_3 = \frac{1}{10},\ a_4 = \frac{1}{17}\ \text{------}$$

Vemos que todos los términos son mayores que cero, entonces:

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}$$

para cualquier $n \in N - \{0\}$

también se verifica que el límite de esta sucesión es el cero, ya que los términos de la sucesión se aproximan a cero.

d) Toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite.

e) Si una sucesión $\{a_n\}$ de números reales tiene límite distinto de cero, entonces a partir de un cierto término todos son del mismo signo que el límite y se puede encontrar un $\nu > 0$ tal que,

$$|a_n| > \nu$$

f) Si tenemos dos sucesiones a_n y b_n verificando que $a_n \leqslant b_n$ para cualquier $n \in N - \{0\}$, cuyos límites son

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = b$$

Entonces, $a \leqslant b$

Ejemplo

Calcular el $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, sabiendo que $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$, para cualquier $n \in N - \{0\}$

Solución

Hemos visto anteriormente que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como se verifica $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$. entonces se cumple que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

g) Si dos sucesiones a_n y b_n tienen el mismo límite a y se verifica que la sucesión c_n para $\forall n \quad a_n \leq c_n \leq b_n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a$$

NOTAS:

a) Si una sucesión a_n monótona decreciente tiene límite entonces sabemos que a_n está acotada. Su cota superior será a_1 y una cota inferior será el valor del límite.

b) Si la sucesión a_n monótona creciente tiene límite sabemos que está acotada, siendo su cota inferior a_1 y su cota superior será el valor del límite.

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, está acotada y decir cuáles son sus cotas.

Solución

Primero vamos a comprobar que a_n es una sucesión monótona.

viene de la página anterior

municipio de Danzig asesinó al inventor de un telar para cintas. En 1.753, trabajadores textiles ingleses destrozaron la habitación de John Kay, el inventor de la lanzadera, obligándole a abandonar el país. Al grito de «¡Muerte a la máquina!», un furioso grupo de tejedores de Nottingham, en 1815, hizo pedazos una máquina de vapor operando en un taller de telares.

Pero era una batalla perdida desde el principio. Las máquinas aparecían demasiado rápidas, demasiado convenientes, demasiado eficientes para dejarse de lado. Y un propio y verdadero torrente de inventores, en Inglaterra y en toda Europa , elaboraron nuevos ingenios capaces de fresar, barrenar, taladrar, amolar, tornear, incidir, templar, laminar, estampar. Y cuando un establecimiento construido por Sir Samuel Bentham y Sir Marc Isambard Brunel para la producción de poleas destinadas a la marina inglesa, entró en funcionamiento en Portsmouth en 1808, el despliegue de 44 diferentes máquinas a vapor permitió alcanzar el

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

increíble ritmo productivo de 130.000 piezas al año. Bastaban 10 trabajadores, sin preparación específica, a los que se exigía solamente atender a las máquinas, para realizar el trabajo normalmente desarrollado por cerca de 110 artesanos especializados.

En los Estados Unidos, la aportación de las máquinas y de los utensilios producidos por ellas, fue decisivo para la conquista de vastos territorios todavía inexplorados: la sierra a vapor, que ebría el camino de la civilización en las selvas vírgenes; el arado de hierro templado de James Oliver, que roturaba los campos; la segadora de Cirus Hall MacCormick, que conseguía segar une parecela de grano, de más de 60 metros de largo en 70 segundos; el «geólogo Yankee», una excavadora a vapor que, devorando un metro cúbico de tierra con un solo golpe de sus mandíbulas de acero, realizaba el trebajo de 100 hombres armados de picos y palas; la trilladora en cadena de Welcome Sprague, que en una jornada batía tanto grano como para llenar 15.000 cestos; la «mondaguisantes» de Scott y Chisholm, que en un solo día desgranaba tantos guisantes como 600 obreros trabajando a todo ritmo.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+3}{n+2} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+2) - (n+3)(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+4n+4 - n^2-4n-3}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Entonces la sucesión a_n es monótona decreciente. Además si estudiamos los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = \frac{3}{2};\quad a_2 = \frac{4}{3};\quad a_3 = \frac{5}{4};\quad a_4 = \frac{6}{5} \ldots$$

Observamos que los términos de la sucesión tienden a 1, que será el límite. Por tanto la cota superior de a_n será, $a_1 = \frac{3}{2}$ y la cota inferior será 1.

Entonces

$1 \leq a_n \leqslant 3/2$ para cualquier $n \in N - \{0\}$

15.—INFINITESIMOS.

Decimos que una sucesión a_n es un infinitésimo cuando su límite es 0.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Ejemplo

Comprobar que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es un infinitésimo.

Solución

En efecto hemos comprobado anteriormente que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ por tanto se trata de un infinitésimo.

NOTA:
Las sucesiones de la forma $a_n = \frac{\alpha}{n^k}$ siendo «α» un número real cualquiera y «K» un número natural, son infinitésimos.

Comparación de infinitésimos

Si el cociente de dos infinitésimos $\frac{\alpha}{\beta}$, tiene un límite finito y no nulo, se dice que ambos son del mismo orden y se escribe:

$$\alpha = 0[\beta]$$

Decimos que α es de orden superior a β cuando dicho cociente

$\frac{\alpha}{\beta}$ tiene por límite 0:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

En el caso de carecer de límite se dice que no son comparables los infinitésimos.

Como término de comparación para infinitésimos se considera un infinitésimo principal

- si $x \to x_0$ se toma como infinitésimo principal.

$$x - x_0$$

- si $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ } se toma como infinitésimo principal

$$\frac{1}{x}$$

Por convenio se adopta como orden del infinitésimo principal 1 y las órdenes superiores vedrán dadas por los exponentes de las sucesivas potencias del infinitésimo.

15.1.—Infinitésimos equivalentes.

Llamamos infinitésimos equivalentes a aquellos cuya diferencia es de orden superior y cuyo cociente tiene como límite 1.

Si sumamos o restamos un infinitésimo a uno de orden inferior el orden de este último no varía.

$$\alpha' = \alpha + \beta \qquad \frac{\beta}{\alpha} \to 0$$

$$\text{entonces: } \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \to 1$$

El orden de una suma de infinitésimos es el del sumando de orden menor y dicho sumando se llama término o parte principal.

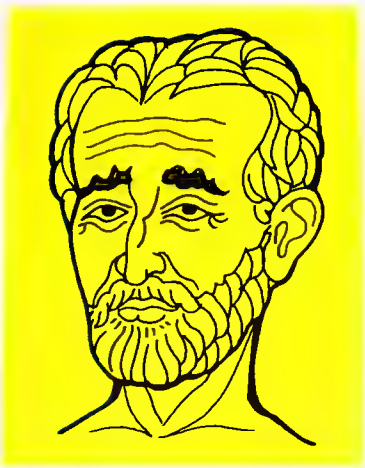
Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{n + 2}{n^2}$

Solución

Descomponiendo a_n como suma de dos sucesiones tenemos

$$a_n = \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$$

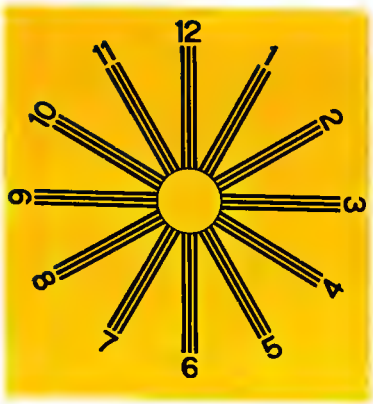


APOLONIO DE PERGAMO

GRAN matemático y astrónomo griego, nació en la ciudad de Pérgamo el año 262 a. de C. y murió el año 170 a. de C.

Fue uno de los discípulos de Arquímedes. Sus obras no alcanzaron mucho relieve hasta que Alejandría (ciudad donde vivió y murió) observó que la figura más perfecta, para él, era el CONO, llegando a la conclusión de que cortando un cono por un plano perpendicular a su eje se obtiene una *circunferencia*. Sus estudios le llevaron a realizar ese mismo corte en forma oblicua: obtenía una *elipse*. Sus estudios respecto al cono le llevaron a realizar distintos cortes y obtener la *hipérbola* y la *parábola*. Escribió un tratado en el que expuso la gran mayoría de las propiedades de las *cónicas*, los cuales aún hoy existen.

Se perdieron la mayoría de sus trabajos, aunque varios de ellos fueron después reconstruidos y perfeccionados por otro gran matemático PAPPUS.



UNA PRUEBA DE ASTIGMATISMO

Una prueba de astigmatismo se hace a veces mediante esta rueda de rayas numeradas. Generalmente, el astigmatismo es causado por una córnea imperfectamente formada que distorsiona la imagen refractando los reyos luminosos en mayor forma sobre un plano —por ejemplo, el vertical o el horizontal— que sobre otro. Observando qué líneas contemple netamente el sujeto y cuáles en forma confusa, el oculista tiene una indiceción sobre el tipo de astigmatismo que pacede.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0+0=0$$

Por tanto la sucesión a_n es un infinitésimo.

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{2^n+1}$

Solución

Primero calculamos el límite del denominador. Si llamamos

$$b_n = 2^n + 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (2^n + 1) = \lim_{n\to\infty} 2^n + \lim_{n\to\infty} 1 = \infty + 1 = \infty$$

Se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 0$$

luego la sucesión a_n es un infinitésimo.

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^n$$

Solución

Calculamos el límite de la base y del exponente por separado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{2n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{2+0} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n^2+1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0^\infty = 0$$

15.2.—Propiedades de los infinitésimos.

1) La suma de dos infinitésimos es otro infinitésimo.

Si tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0.$

La suma de un numero finito de infinitesimo es otro infinitesimo

2) El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo.

Si tenemos dos infinitésimos a_n y b_n entonces por la propiedad del límite del producto se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \cdot 0 = 0$$

El producto de un numero finito de infinitesimos es otro infinitesimo

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 3n + 2}$

Solución

Si consideramos el denominador como un polinomio de variable n y lo descomponemos en factores

$$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$$

Calculando límites

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

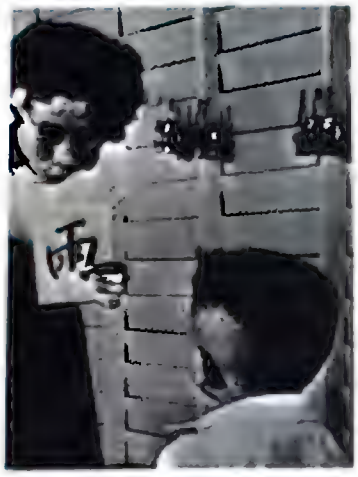
3) El producto de un infinitésimo por una sucesión convergente es un infinitésimo.

Si tenemos un infinitésimo a_n y una sucesión b_n cuyo límite es b, se verifica

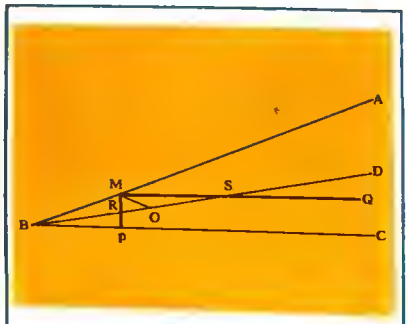
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \cdot b = 0$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión. $a_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n^3 + 2n}$



Teniendo un cerebro muy desarrollado, el hombre posee el inestimable don de la palabra, instrumento insustituible que le ha permitido superar aquellas barreras del conocimiento que permanecen herméticamente cerradas en los animales, privados de la palabra. Símbolo fácilmente comunicable y abstracto de cuanto, visible o invisible, se vea o se piense, la palabra se deja caer desde el cerebro hasta la boca y nosotros la pronunciamos, hablamos. El castellano es una entre las muchísimas colecciones de palabras. Existen más allá de medio millón de lenguas sobre la tierra, y entre todas constituyen la más dúctil, la casi inacabable, moneda de intercambio de la humanidad. Escrita, la palabra permite comunicar el conjunto de nuestro pasado y de nuestro presente. Además, la palabra es el instrumento fundamental de nuestro pensamiento: ha sido ampliamente demostrado que, sin el conocimiento de las palabras, estamos impedidos en actividades intelectuales de todo tipo. Aprender una lengua es, por consiguiente, el primer paso para conocer mayormente. Siendo un animal que madura despacio, el hombre aprende más bien con velocidad a expresarse en el plano verbal. A los tres meses, ya vocaliza todos los sonidos que le serán útiles a continuación; a los dos años, comienza a servirse de palabras para comunicar significados; a los seis está preparado para la escuela e iniciar el camino de un aprendizaje más sistemático y formal.



Los griegos denominaban inserción a una relación entre dos figuras que consistía en admitir que dadas dos transversales y un punto fijo, siempre existe una recta que pasa por el punto fijo y tal que sus intersecciones con las transversales determinan un segmento de longitud prefijada.

Si tenemos un ángulo ABC. Por el punto M de AB trazamos MP y MQ que son perpendiculares y paralela respectivamente a BC. La recta BD que determina entre MP y MQ un segmento RS doble de BM triseca al ángulo dado pues el ángulo DBC es la mitad de ABC. Basta para comprobarlo unir el punto medio O de RS com M y considerar los triángulos MOS y BOM.

Solución

Podemos expresar la sucesión a_n como producto

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2}$$

Calculando el límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

4) El producto de un infinitésimo por un número real cualquiera es un infinitésimo.

Si tenemos el infinitésimo a_n y el número real «K» se verifica que

$$\lim_{n \to \infty} (K \cdot a_n) = K \cdot \lim_{n \to \infty} a_n = K \cdot 0 = 0$$

16.—ALGEBRA DE LIMITES.

CUADRO RESUMEN DE LAS OPERACIONES CON LIMITES.

1) Límite de suma-diferencia → indeterminación
2) Límite de producto-cociente → indeterminación
3) Límite de potencias.

3-1) límite q^n

3-1-1) $q > 1$

3-1-2) $q = 1$

3-1-3) $q < 1$

3-1-4) $q < -1$

3-1-5) $q = -1$

3-2) $\lim a_n^m$ siendo $m \in N$; $\lim a_n = a$

3—3) $\lim a_n^{1/m}$ $m \in N, \lim a_n = a$

3-3-1) m par

3-3-2) m impar

3-4) $\lim a^{1/n}$

3-4-1) $a > 1$

3-4-2) $0 < a < 1$

3-5) $\lim a^{b_n}$ $a > 0$

3-5-1) $\lim b_n = 0$ $\{b_n\}$ sucesión de racionales de lim b

3-5-2) $\lim b_n = b$ $\{b_n\}$ sucesión de reales de lim b.

3-6) $\lim a_n^{b_n}$ $a \geq 0$

3-6-1) $\lim a_n = a > 0, \neq 1, \lim b_n = b$

3-6-2) $\lim a_n = 1$ $b_n \leq K$

3-6-3) $a_n \leq K, \lim b_n = 0$

3-6-4) $\lim a_n = 1; \lim b_n = \infty \Rightarrow e^{\lim(a_n - 1)b_n}$

INDETERMINACIONES

$\infty - \infty$

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$

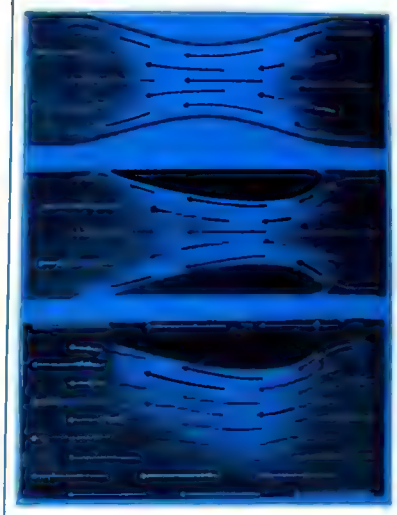
0^0 $(+\infty)^0$ $1^{\pm\infty}$ (*)

} son expresiones simbólicas.

IGUALDADES SIMBOLICAS

$0^a = 0$	$a > 0$
$0^a = +\infty$	$a < 0$
$(+\infty)^a = +\infty$	$a > 0$
$(+\infty)^a = 0$	$a < 0$
$a^{+\infty} = +\infty$	$a > 1$
$a^{+\infty} = 0$	$a < 1$
$a^{-\infty} = 0$	$a > 1$
$a^{-\infty} = +\infty$	$a < 1$

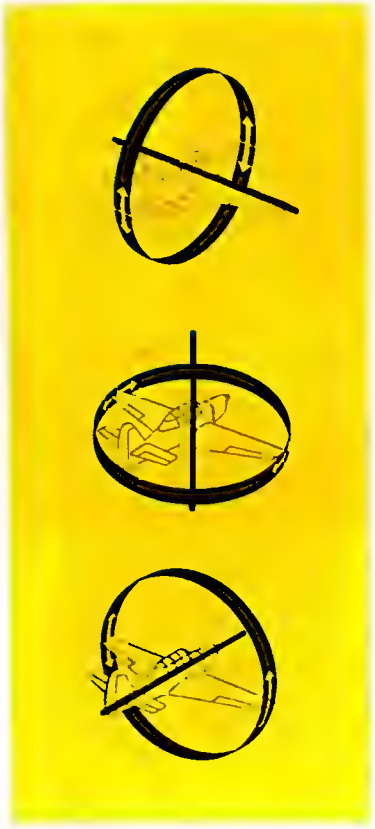
* NOTA:
$1^{\pm\infty}$ es un símbolo representando una potencia $a_n^{b_n}$ siendo a_n una sucesión que tiende a 1 y b_n una sucesión que tiende a $\pm\infty$.



1. Los tres esquemas de esta página muestran el principio de Bernouilli que explica cómo un ala produce capacidad de vuelo. Un fluído en movimiento a través del estrechamiento de un conducto (arriba) aumenta su velocidad, mientras diminuye la presión ejercida en las paredes del conducto.

2. Un flujo acanalado en un estrechamiento formado por los perfiles de alas opuestas, como en este caso, se encuentra en condiciones análogas al caso precedente: el aire que atraviesa el estrechamiento acelera y ello produce una disminución de presión sobre las dos superficies.

3. El mismo principio rige en el caso de un solo perfil. El flujo que pasa sobre el perfil aumenta velocidad y ejerce une presión menor de la producida por el fluído que pasa por debajo. Esta diferencia contínua de presión crea y mantiene la capacidad de vuelo.



MOVIMIENTOS EN TORNO A LOS EJES

Los tres movimientos fundamentales que puede realizar un avión —cabeceo, giro y balanceo— acontecen por rotación en torno a los tres ejes mostredos en las figuras. En el cabeceo, la punta rota hacia arriba o hacia abajo en torno al eje lateral del avión; durante el giro la rotación se da alrededor de un eje vertical que pasa por el cuerpo del aparato, y en el belanceo las alas oscilan en torno al eje longitudinal del armazón.

16.1.—Límite de una suma de sucesiones.

1) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Demostraremos que $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

En efecto:

$$\text{para } \forall \epsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists\ N_1 \,/ |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ con } n > N_1 \\ \exists\ N_2 \,/ |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \text{ con } n > N_2 \end{array} \right.$$

tomando $N = \max [N_1, N_2]$, resulta:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall n > N |a_n + b_n| - |a + b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$$

$$\text{luego} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Ejemplo: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^3}{n+1} - \frac{5n^3 - 1}{n^2+1}\right)$;

$$a_n = \frac{3n^3}{n+1}, \quad b_n = \frac{5n^3 - 1}{n^2+1}$$

se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

estamos pues ante la indeterminación $\infty - \infty$.

Esta indeterminación se resuelve operando:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \frac{3n^5 + 3n^3 - 5n^4 + n - 5n^3}{(n^2 + 1)(n + 1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^5 - 5n^4 + 2n^3 + 1 + n}{(n^2+1)(n+1)} = +\infty$$

Este tipo de indeterminación se presenta con frecuencia cuando aparecen diferencias de raíces.

Ejemplo: $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^3} - \sqrt{(n-2)^3}\right]$

Tenemos: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

indeterminación $\infty - \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^3} - \sqrt{(n-2)^3}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - (n-2)^3}{\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-2)^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 - 12n + 8}{\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-2)^3}} = \infty$$

Lo que se hace en estos casos es multiplicar y dividir por la conjugada. Veamos en que consiste esto

$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ llamamos conjugada a la expresión E tal que

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})E = a - b.$$

$$E = \frac{a - b}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n]{b^n}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} =$$

$$= \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$$

2) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces: $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a\,b$.

En efecto:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq$$

$$\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq k|b_n - b| + (|b| + 1)|a_n - a|$$

donde k es una cota de a_n. Dado $\epsilon > 0$ se puede hallar N_1, N_2 tales que

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2k} \qquad n > N_1$$

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b|+1)} \qquad n > N_2$$

tomando $N = \text{Max}\,[N_2, N_2]$ resulta:

$$\forall \epsilon \text{ y } \forall n > N \; |a_n b_n - ab| < \epsilon \Rightarrow \lim a_n b_n = ab.$$

Aquí se puede presentar *casos de indeterminación*. En efecto si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, no podemos decir, utilizando este procedimiento cual es el límite de la sucesión producto.

Como caso particular del producto (podríamos utilizar el concepto de inversa de una sucesión), pasamos a estudiar el cociente de sucesiones.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

En este caso aparecen las siguientes indeterminaciones:

$a_n \to \infty$	$b_n \to \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$a_n \to 0$	$b_n \to \infty$	$\frac{0}{\infty}$
cuando $a_n \to 0$	$b_n \to 0$	$\frac{0}{0}$

Posteriormente veremos como abordar estas indeterminaciones.

BACHE: LA CAPACIDAD DE VUELO NO ES SUFICIENTE

Hasta un cierto punto, un piloto puede confiar en la regla de que la capacidad de vuelo crece a medida que aumenta el ángulo de ataque de las alas. A velocidad constante, y mientras el valor de dicho ángulo se encuentra entre 4.º y 8.º, por ejemplo, la capacidad de vuelo resulta prácticamente redoblada. Sin embargo, en muchos casos, esto deja de ser cierto cuando el ala alcanza un ángulo de ataque próximo a los 14.º: el umbral de une situación particular llamada bache. En este momento el aire que pasa por encima de las alas comienza a romperse lejos de le superficie haciéndose turbulento. La región de baja presión sobre el ala comienza a desaparecer y con ella le capacidad de vuelo. Si el piloto continúa manteniendo las alas con un ángulo de ataque todavía superior, la situación se exaspera hasta que cerca de los 18.º el bache es completo: todo el aire que fluye sobre la parte superior es ahora turbulento. En estas condiciones, la diferencia de presión entre la superficie superior a la inferior del ala es pequeña: la capacidad de vuelo desaparece. Privado de la misma el avión cae con el morro hacia abajo. Durante la caída las alas se encuentran automáticamente con un ángulo favorable respecto del viento relativo, le velocidad del aire aumenta rápidamente, la capacidad de vuelo se restablece y el piloto conduce el aparato de nuevo a la estabilidad.

ECHEGARAY, JOSE

Nació en Madrid en 1832 y murió en la misma ciudad en 1916.

Hombre inquieto que desempeñó con gran habilidad los más diversos campos. Como escritor se le conocen más de 60 obras: «O locura o santidad» (1877), «El gran Galeoto» (1881), «Mancha que limpia» (1895). «El hijo de don Juan» (1892), «El loco de Dios» (1900): Toda su obra crea un problema de efecto hasta llegar a una situación patética. «El honor utrajado», «Venganzas», etc. Sus personajes suelen ser anormales, situaciones inverosímiles pero con mucha fuerza y potencia dramática.

Como político desempeñó el Ministerio de Fomento (1869-1872) y Ministerio de Hacienda (1874), fue también diputado por Asturias en 1873. Fue el creador del Banco de España.

En 1904 compartió el premio Nobel con el poeta Frederic Mistral. Se le tributó un homenaje nacional.

Cursó la carrera de ingeniero. Catedrático de Física Matemática en la Universidad de Madrid. Introdujo en España la Geometría de CHASLES. Estudió el cálculo de variaciones y la teoría de los determinantes.

18.3.—Límite de un cociente de sucesiones.

Dadas dos sucesiones a_n y b_n siendo $b_n \neq 0$ se verifica que el límite del cociente $\frac{a_n}{b_n}$ es igual al cociente de los límites de ambas.

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{3n^2 + 2}{n^2 + n}$

Solución

Dividiendo el numerador y denominador de la sucesión a_n por n^2 tenemos

$$a_n = \frac{\frac{3n^2 + 2}{n^2}}{\frac{n^2 + n}{n^2}} = \frac{3 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Aplicando la propiedad del límite del cociente de dos sucesiones

$$\lim a_n = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 3 + \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$$

Ejemplo

Calcular el límite de $a_n = \dfrac{n^3 + n - 1}{2n^2 - 1}$

Solución

Dividiendo numerador y denominador de a_n por n^3 tenemos

$$a_n = \frac{\frac{n^3 + n - 1}{n^3}}{\frac{2n^2 - 1}{n^3}} = \frac{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}$$

Calculando el límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}$$

Aplicando la propiedad del límite del cociente

1081.

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}} = \frac{1+0-0}{0-0} = \infty$$

NOTA:

Si tenemos dos sucesiones a_n cuyo limite es $a \neq 0$ y b_n con límite 0 siendo $b_n \neq 0$ entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$

Solución

Si dividimos el numerador y denominador por n esta no varía y tenemos que

$$a_n = \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n^2+n}{n}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n+1}$$

Calculando el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y aplicando la propiedad anterior

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)} = \frac{1-0}{\infty} = 0$$

NOTA:

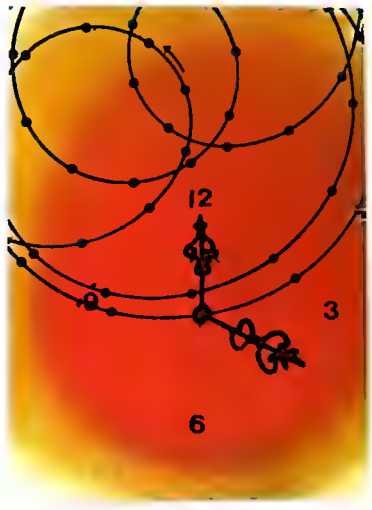
Dadas las sucesiones a_n con límite finito a y la sucesión b_n que diverge hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$ siendo $b_n = \neq 0$ entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

18.4.—Límite de potencias de sucesiones.

En este apartado vamos a estudiar los límites de sucesiones cuyos términos generales son expresiones del tipo A^B, donde ó bien A será una constante y B una sucesión, A sucesión y B constante, o, por último tanto A como B sucesiones.

Empecemos con un ejemplo sencillo.



Orientarse, es decir, saber por qué parte sale el sol parece una cosa fácil con ayuda de una brújula.

Sin embargo no es frecuente que llevemos una brújula en el bolsillo. Lo que sí llevamos es un reloj que con un pequeño truco nos puede ayudar a orientarnos. Veamos:

Apuntando la manecilla de las horas en dirección al sol, se mira el ángulo que forma esta manecilla y la dirección indicada por la hora 12 del reloj, la bisectriz, o sea la línea que divide por la mitad este ángulo indica la dirección sur en las horas matinales y la dirección norte en las de la tarde.

Acordándonos de este pequeño truco podemos conocer en todo momento en qué dirección caminamos, dónde estaba situado un monumento etc...

Geométricamente el mundo en que vivimos tiene tres dimensiones y a todos nos parece imposible imaginar más, pero desde el punto de vista matemático podemos imaginar problemas en cuatro o más dimensiones.

En matemática pura aparecen fórmulas con cuatro o más variables independientes que varían desde + a — y que pueden dar una idea «sobre el papel» de lo que puede ser un espacio tridimensional.

Si en realidad nuestro mundo tuviera más dimensiones de las que percibimos físicamente resultaría que no veríamos de los objetos más que su proyección tridimensional. Es lo mismo que para una esfera, objeto tridimensional, una circunferencia, que no es sino su proyección bidimensional.

Esta teoría matemática fue formulada por Riemann en 1854 cuando surgía la Física geométrica y fue la base para el posterior desarrollo de la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein.

Ejemplo:

Calcular el límite de q^n.

Considerasemos cuatro casos:

1) $q > 1 \Rightarrow q = 1 + r \Rightarrow q^n = (1 + r)^n =$

$$= 1 + rn + \ldots > 1 + nr$$

al ser $1 + nr$ una sucesión divergente, también lo será q^n. Luego $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ si $q > 1$.

2) $q = 1 \Rightarrow q^n = 1 \forall n$ luego $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$

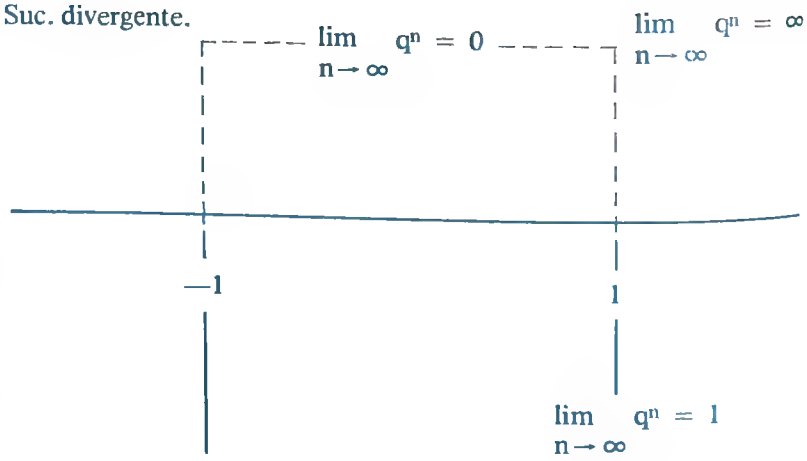
3) $|q| < 1 \Rightarrow q' = \dfrac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow |q| = \dfrac{1}{q'} = \dfrac{1}{1+r}$

$$|q|^n = \frac{1}{q^n} = \frac{1}{(1+r)^n} < \frac{1}{nr}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{nr} = 0$, resulta que la sucesión q^n tiene también de límite cero.

4) $q = -1$ oscilante alternando a ∞ y $-\infty$ y no tiene límite.

Resumamos todo lo anterior en un gráfico.



Estudiemos a continuación las sucesiones cuyo término general sea a_n^m, donde $m \in N$.

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^m = a^m.$$

En efecto. Calculemos la conjugada de $a_n^m - a^m$. Esto es, efectuemos el cociente $\dfrac{a_n^m - a^m}{a_n - a}$

Tenemos: $(a_n^m - a^m) = (a_n - a)(a_n^{m-1} + a_n^{m-2}a + \ldots + a^m)$

luego $|a_n^m - a^m| = |a_n - a|[a_n^{m-1} + a_n^{m-2}a + \ldots + a^m]$

por ser $\{a_n\}$ convergente esta acotada y en consecuencia el valor del corchete está también acotado. Luego:

$$|a_n^m - a^m| \leq |a_n - a|K$$

$$\forall n > N \; |a_n - a| < \frac{\epsilon}{K} \text{ luego } |a_n^m - a^m| < \epsilon$$

$\lim_{n \to \infty} a_n^m = a^m$ como queríamos demostrar.

Estudiemos ahora la sucesión $a_n^{1/m}$ con $m \in N$. Distinguiremos dos casos:

1) m impar. Entonces si $\lim_{n \to \infty} a_n = a, \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n^{1/m} = a^{1/m}$.

En efecto procediendo de igual forma que en el caso anterior resulta:

$$|a_n - a| = |a_n^{1/m} - a^{1/m}|[a_n^{(m-1)/m} + a_n^{(m-2)/m} a^{1/m} + \ldots + a^{(m-2)/m}]$$

$$> K'$$

El corchete no está acotado y en consecuencia:

$$|a_n^{1/m} - a^{1/m}| = \frac{|a_n - a|}{[\ ]} < \frac{|a_n - a|}{K'} < \frac{\epsilon}{K} < \epsilon'$$

2) Si m es par salvo que todas las a_n fuesen no-negativas, no tendríamos siquiera definida la sucesión $\{a_n^{1/m}\}$. En el caso de que m fuera par y todas las a_n no-negativas tendríamos dos determinaciones reales para la raíz-enésima. Unicamente tomando siempre la determinación positiva o bien siempre la determinación negativa.

Vamos a estudiar a continuación la sucesión de término general

$b_n = a^{1/n}$ donde $a > 1$.

En primer lugar comprobaremos que todos los términos de la sucesión son mayores que 1. En efecto, supongamos que $b_k \leq 1 \Rightarrow b_k = a^{1/k} < 1 \Rightarrow b_k^k = a < 1$, lo que va en contra de la hipótesis inicial. Así pues $b_n > 1 \ \forall n$. La sucesión está acotada inferiormente.

El poder de la matemática raramente se ha revelado con una eficiencia superior a la demostrada a través de la teoría de la relatividad. Aún aceptando los matemáticos abstracciones como el infinito o las raíces cuadradas de los números negativos, la relatividad parecía contrastar con la experiencia cotidiana. No obstante, esa organizaba los fenómenos en un orden global tal, que los científicos estaban fascinados con ella.

A medida que la evidencia crecía, su interés se transformaba en certeza: la teoría de le relatividad era exacta. Empleando ecuaciones basadas en sus ideas, Einstein pudo hecer algunas previsiones. También éstas parecían contrarias al sentido común, pero los científicos verificaron bien pronto su extraordinaria exactitud. Los rayos de luz parecían curvarse como Einstein predijo; las órbitas de los planetas tenían trazos extraños que la física clásica no conseguía explicar pero que la teoría de la relatividad prevía; tiempo, longitud y peso parecían crecer o disminuir cuando los cuerpos se movían a grandes velocidades, justo como Einstein había afirmado.

Para el profano, la demostración más memorable de la exactitud de la ecuación relativista —por la que materia y energía son dos aspectos de la misma cosa— es la tremenda explosión nuclear, de la que reproducimos una imagen terrible.

LA DEMOSTRACION DE FERMAT

La gran labor del matemático le lleva a enunciar teoremas y proposiciones que ha de demostrar.

Sin embargo hay una célebre proposición que aparece en la obra «Aritmética» de Diofanto que nos dice que no podemos encontrar cuatro números x, y, z, n ϵ N para n > 2 que cumplan que $x^n + y^n = z^n$ que no se ha conseguido demostrar en forma general.

Fermat estudió en el siglo XVII esta proposición realizando sus anotaciones en los márgenes del libro que reproducía la obra de Diofanto y asegura haber encontrado la demostración por la cuál anota en su libro:

«He encontrado una demostración de esa proposición realmente maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla».

Tal demostración no apareció en sus escritos ni en la correspondencia del matemático llegando a dudarse de la autenticidad de la afirmación de Fermat.

Lo cierto es que desde que se dio a conocer esta nota se han sucedido las investigaciones que buscan la demostración maravillosa de Fermat y ello ha contribuido al desarrollo de la teoría matemática.

Actualmente seguimos sin conocer la demostración y lo cierto es que tampoco se ha encontrado un caso para el que no se cumpla de modo que se ha recurrido al empleo de las computadoras en la búsqueda de rapidez a la hora de realizar cálculos con grandes números esperando encontrar alguno que pueda cumplir que un cuadrado pueda descomponerse en la suma de otros dos.

Veamos ahora que la sucesión es decreciente, esto es

$$b_{n+h} = a^{1/n+h} < a^{1/n} = b_n, \text{ con } h \in N$$

$$(b_{n+h})^{n+h} = a = (b_{n+h})^n \cdot (b_{n+h})^h > (b_{n+h})^n$$

ya que $(b_{n+h})^h > 1$

luego $a = b_n^n > (b_{n+h})^n \Rightarrow b_n > b_{n+h}$ $n, h \in N$.

Estamos pues en condiciones de afirmar que la sucesión $\{b_n\}$ tiene límite.

Para calcularlo procedemos de la siguiente forma. El conjunto $\{b_1, b_2, ..., b_n...\}$ tiene extremo inferior por tratarse de un conjunto infinito acotado inferiormente. Sea α dicho extremo inferior. Desde luego α no es menor que 1, veamos si puede ser mayor que 1.

$\alpha = 1 + \gamma$; Tendríamos:

$$\alpha - \epsilon = 1 + \gamma - \epsilon = 1 + \beta$$

el ϵ lo elegimos de modo que

$$|a^{1/n} - \alpha| < \epsilon$$

luego

$$1 < 1 + \beta = \alpha - \epsilon < a^{1/n}$$

$a > (1 + \beta)^n > 1^* + n\beta$ y como la sucesión $1 + n\beta$ es divergente, resulta que $a \to \infty$, lo que iría en contra de haberlo supuesto constante. Así pues $\alpha = 1$ y $\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1$

Calculamos a continuación con cuatro cifras decimales algunos términos de la anterior sucesión, para a = 2, a = 8, a = 34, a= 112, a = 1125.

2,000, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.487, 1.225, 1.1041
8.000, 2.8284, 1.6818, 1.5157, 1.4142, 1.3459, 1.2968...
34.000, 5.8310, 3.2396, 2.4147, 2.0244, 1.7999, 1.6549,
112.000, 10.5830, 4.8203, 3.2532, 2.5695, 2.1955, 1.9622,

1125.000, 33.5410, 10.4004, 5.7915, 4.0760, 3.2250, 2.7282,
2.4065, 2.1828, 2.0189, 1.8940, 1.7958, 1.7167,...

Acabamos de ver que $\lim_{n \to \infty} \simeq a^{1/n}$ para $a > 0$ es 1.

Vamos a ver que $(a^{1/n} - 1) \simeq \frac{k_a}{n}$ para $a > 0$ también

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{n \to \infty} n(a^{1/n} - 1) = k_a$$

$$(\sqrt{a})^n = a = [1 + \sqrt{a} - 1]^n = [1 + \frac{n(\sqrt{a} - 1)}{n}]^n =$$

$$(1 + \frac{\alpha_n}{n})^n \text{ siendo } \alpha_n = n(\sqrt{a} - 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = K_a$$

$$\text{luego } \lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right) \qquad = \lim \alpha_n = a = L\,a$$

$$\text{luego } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = L\,.\,a$$

$$\text{Por tanto} \quad K\,.\,a = L\ a$$

$$n(a^{1/n} - 1) \simeq L\ a$$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{a} - 1) = L\ a$$

Estudiemos ahora la misma sucesión, pero con:

$$0 < a < 1.$$

Todos los términos de la sucesión $\{b_n\}$ son menores que 1. En efecto, supongamos que fuese $b_k \geq 1$, $b_k^k = (a^{1/k})^k = a > 1$ lo que iría en contra de la hipótesis. Así pues la sucesión está acotada superiormente $b_n < 1, \forall\ n$.

La sucesión es creciente: $b_{n+h} = a^{1/n+h} > a^{1/n} = b_n$

con $h \in N$

$$(b_{n+h})^{n+h} = a = (b_{n+h})^h\,.\,(b_{n+h})^n < (b_{n+h})^n$$

$$a = b_n^n < (b_{n+h})^n \ ;\ \text{luego } b_n < b_{n+h}\ h \quad \forall n, h \in N.$$

La sucesión tendrá por tanto límite. Además el conjunto $\{b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots\}$ acotado superiormente tiene extremo superior, dicho extremo superior es igual a 1 y por un razonamiento análogo al del caso anterior llegaríamos a que $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

Damos a continuación algunos términos de la sucesión $a^{1/n}$ para $a = 0{,}5$, $a = 0{,}9$, $a = 0{,}01$.

0,5000; 0,7071; 0,7937; 0,8409; 0,8706; 0,8909; 0,9057; 0,9170; 0,9259;...
0,9000; 0,9487; 0,9655; 0,9791; 0,9826; 0,9852; 0,9869; 0,9884; 0,9895;...
0.0100; 0,1000; 0,2154; 0,3162; 0,3981; 0,4642; 0,5179; 0,5623; 0,5995; 0,6310; 0,6579; 0,6813; 0,7017; 0, 7197; 0,7359; 0,7499; 0.7627; 0,7743; 0,7848; ..

la sucesión $\dfrac{a^{1/n} - 1}{1/n}$, es una sucesión decreciente acotada inferiormente, convergente y su límite es igual a La como veremos más adelante.

ORIGEN ARITMETICO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

El campo de los números reales es ya insuficiente para resolver multitud de problemas artiméticos y cuestiones fundamentales de Geometría.

Hemos introducido los números irracionales para hacer posible la radicación y la logaritmación pero no lo hemos logrado completamente. Queda sin solución la extracción de raíces de índice par de los números negativos pues no existe ningún número real positivo ni negativo, cuyas potencias de exponente par sean negativas.

Tampoco podemos definir en el campo real las potencias de exponente irracional de los números negativos, pues al tomar valores racionales que se aproximen al exponente para aquellos que tienen como denominador un número par, no es posible la potenciación. Por esta razón, se ha tomado siempre positiva la base de los sistemas de logaritmos.

Asímismo carecen de logaritmo en el sistema real, los números negativos; pues siendo positiva la base, sus potencias de exponente real son siempre positivas.

Todavía carecen de sentido expresiones del tipo de los siguientes:

$\sqrt{\ }-3$, $(-5)^{\frac{3}{4}}$, $(-2)^n$,

$\text{Log}\,(-\frac{7}{2})$, ...

Como vimos en el campo de los nºs complejos todas estas exposiciones tienen solución.

HIPARCO

DEL griego Hipparkhos, astrónomo nacido en el siglo II a. de J.C. Se cree que nació en Nicea (Bittinia), aunque Plinio le llamase «El Rodio», ya que fue en Rodas, donde hizo la mayor parte de sus estudios astronómicos entre el año 161 y el 127 a. de J.C. Sabio de los más representativos de la época alejandrina, Hiparco obtuvo resultados y descubrimientos esenciales muy precisos, por lo que son escasos, ya que era muy exigente en cuanto a la calidad y cantidad de observaciones.

Inventó un dioptrio especial para medir las variaciones de diámetro entre el Sol y la Luna, más perfecto que el de Arquímedes. Dividió el círculo en 360°, cada grado en 60' y cada minuto en 60''. También dividió el diámetro de un círculo en 120 *partes* y determinó por cálculo el valor de las *cuerdas* correspondientes a estas partes. Creó una tabla de los valores de las *cuerdas* a partir del medio grado para facilitar los cálculos astronómicos en que se usarán.

continúa en la página siguiente

Pasamos a continuación a estudiar la sucesión

$\{a^{b_n}\}$ donde $a > 0$ y $\{b_n\}$ una sucesión convergente a cero. Demostrarmos que $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = 1$

La demostración la haremos, bien que nuestra sucesión se encuentra situada entre dos que convergen a 1.

$$d_n \leq a^{b_n} \leq c_n$$

$$\text{con } \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 1$$

Por ser $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Podemos poner:

$$-\frac{1}{N(n)} < b_n < \frac{1}{N(n)} \text{ donde } N(n) \to \infty$$

Evidentemente $a^{-1/N(n)} < a^{b_n} < a^{1/N(n)}$ y como $\lim_{n\to\infty} (a)^{1/N(n)} = 1$;

$$\lim_{n\to\infty} (a)^{-1/N(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{1/N(n)} =$$

Resulta que $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = 1$

Comprobemos ahora que $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b$ con $b_n \to b$.
$\{b_n\}$ sucesión de números reales.

$$\left|a^{b_n} - a^b\right| = \left|a^b\right|\left|a^{b_n - b} - 1\right| < k\,\epsilon < \epsilon'$$

Para completar estos casos consideremos sucesiones de la forma:

$a_n^{b_n}$ con $a_n \geq 0$ para $\forall n$

Si $\lim a_n = a > 0$, y distinto de 1 y $\{b_n\}$ bien de límite b, entonces: $\lim a_n^{b_n} = a^b$

Si $\{a_n\}$ tiene de límite 1 y $\{b_n\}$ está acotado (aunque no tenga límite $\lim a_n^{b_n} = 1$. De igual forma si $\{a_n\}$ está acotada y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ a_n^{b_n} \to 1.$$

Si $\{a_n\}$ tiende a 1 y b_n es divergente. ***Estamos ante la indeterminación 1^∞.***

Volviendo a la sucesión $\{a^{b_n}\}$ con $\{b_n\}$ sucesión de números reales convergente a b. Bastaría introducir a b_n en un intervalo de centro b y extremos racionales. Es decir crear dos sucesiones de racionales $\{r_n\}$ y $\{q_n\}$ de forma que $r_n \leq b_n \leq q_n$ y como

$$\lim_{n\to\infty} r_n = b;\ \lim_{n\to\infty} q_n = b \qquad \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^b = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

luego $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b$

19.—EL NUMERO «e». SUCESIONES RELACIONADAS CON EL.

Consideremos la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Estamos pues ante una indeterminación del tipo 1^∞.

Veamos si esta sucesión puede tener límite

$$a_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots$$

La sucesión es monótona creciente, pues al aumentar n aumenta el número de términos y los sustraendos van disminuyendo.

Por otra parte la sucesión está acotada, pues:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Luego esta sucesión tiene límite, este límite es el número real e= 2, 718281828... ≃ 2,72. Cuando estudiemos series profundizaremos en esto.

Ejemplo:

Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es.

$$(1 + \frac{1}{n})^\alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left[(1 + \frac{1}{n})^n\right]^{\alpha/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha/n} = 1$$

Ejemplo:

Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es

$$(1 + \frac{1}{n})^{n\alpha}$$

viene de la página anterior

Estudiando el movimiento de la Luna y el Sol, hizo para este último dos teorías basada una en el procedimiento excéntrico fijo y la otra sobre el epiciclo, y demostró que valían lo mismo.

Comprobó que el Sol, en su movimiento anual, tardaba más tiempo en regresar al mismo punto del zodíaco que en volver a juntarse con el ecuador en primavera, y esto lo explicó por un desplazamiento anual de los puntos equinociales que ha recibido el nombre de «Precisión de los equinocios».

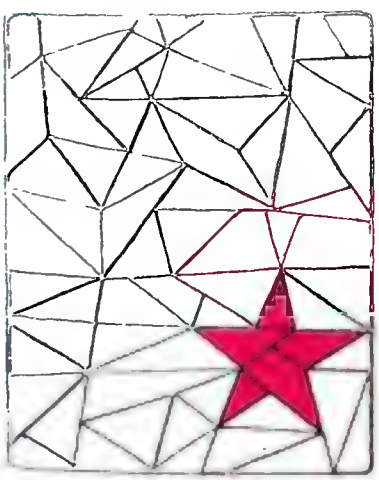
Fijó las posiciones de cerca de 800 estrellas y dio a cada una de ellas un tamaño en relación con su luminosidad. Fue éste el primer catálogo de estrellas propiamente dicho.

Los fuegos artificiales son originarios de Asia, donde ya se conocían varios siglos antes de nuestra era. Fueron introducidos en Europa por los árabes en el siglo VII. A finales del Renacimiento fueron requisito de todas las grandes fiestas.

Algunos artificieros como los Ruggieri en el siglo XVIII alcanzaron gran fama, comparable a los pintores o los músicos de moda.

Los pirotécnicos son capaces de montar espectáculos diversos: petardos, buscapies, bengalas, candelas romanas, cohetes voladores, son los medios de los que se valen para conseguirlo.

Aunque la mayoría de los fuegos artificiales sólo sirven para la celebración de festividades, hay otros que cumplen funciones utilitarias como son los cohetes de señalización y socorro que son lanzados para indicar una posición o un peligro.



SOLUCION A LA PAG. 1060

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\alpha}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\alpha}=e^{\alpha}$$

Vamos a ver a continuación dos importantes propiedades

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\pm h}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\pm h}=e$$

También se cumple: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\pm h}\right)^{n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

En efecto $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\pm h}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\pm h}\right)^{n\pm h}$

con lo que esta sucesión se convierte en una subsucesión de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ y en consecuencia $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\pm h}\right)^{n}=e$.

2) Ahora estamos en condiciones de demostrar lo siguiente: Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión convergente a cero entonces:

$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}=e.$ En efecto: $\frac{1}{n\pm k}\le\alpha_n\le\frac{1}{n\pm h}\Rightarrow$

$$n\pm h\le\frac{1}{\alpha_n}\le n\pm k$$

$$\left(1+\frac{1}{n\pm k}\right)^{n\pm h}\le(1+\alpha_n)^{1/\alpha n}\le\left(1+\frac{1}{n\pm k}\right)^{n\pm k}$$

Luego esta situada entre dos sucesiones que convergen al mismo límite, luego

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{1/a_n}=e$$

Como consecuencia, tenemos que si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente al número a $(\lim_{n\to\infty}a_n=a)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(1+a_n\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e^{a}$

En efecto: $\lim_{n\to\infty}(1+a_n\alpha_n)^{1/\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+a_n\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n a_n}}\right]^{a_n}=$

$$e^{\lim_{n\to\infty}a_n}=e^{a}$$

Como caso particular resulta: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Demostrar que si $a_n \to 1$ $a_n \neq 1 \forall$ n y $b_n \to \infty$ se tiene:
Si existe $\lim (a_n - 1)\, b_n = h \neq \infty$, existe $\lim a_n^{b_n} = e^h$.

Sea $c_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$. Es fácil demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \infty$

Por otra parte podemos escribir

$$a_n^{b_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\right]^{(a_n - 1)\, b_n}$$

y como $\lim\limits_{c_n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e$

y por tanto si $\lim (a_n - 1) b_n = h$

$$\lim a_n^{b_n} = e^h$$

o sea $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^{b_n} = e^{\lim (a_n - 1) b_n}$

$$\text{si} \begin{cases} a_n \to 1 \\ b_n \to \infty \\ \lim (a_n - 1) b_n = h \neq \infty \end{cases}$$

20.—CALCULO DE LIMITES

20.1.—Límite del cociente de dos polinomios en «n».

Si las sucesiones a_n y b_n son dos polinomios en «n»: $a_n = \alpha_p \cdot n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0$ y $b_n = \beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0$.

Para calcular $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ vamos a considerar varios casos

a) que el grado del denominador sea mayor que el grado del numerador, es decir, $p < q$. Entonces se verifica:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0}{\beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} = 0$$

Esta igualdad es cierta ya que si dividimos el numerador y denominador por n^q tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_p \dfrac{n^p}{n^q} + \alpha_{p-1} \dfrac{n^{p-1}}{n^q} + \ldots + \alpha_1 \dfrac{n}{n^q} + \dfrac{\alpha_0}{n^q}}{\beta_q \dfrac{n^q}{n^q} + \beta_{q-1} \dfrac{n^{q-1}}{n^q} + \ldots + \beta \dfrac{n}{n^q} + \dfrac{\beta_0}{n^q}} =$$

BOECIO

SEVERIANO Boecio nació en Roma el año 470 d. C. y murió el año 540. Hijo de un cónsul, tuvo por maestro a Simeco, con cuya hija se casó. Su educación la realizó en Atenas. Adquirió gran facilidad de palabra que le llevó a un alto puesto en el Senado. Fue comisionado para parlamentar con el rey godo Teodorico, antes de que éste entrara en Roma. Teodorico lo tomó como protegido y confiándole importantes misiones. Viendo con complacencia el resultado de la política de éste, el rey le nombró consul y después príncipe del Senado en el año 512.

Fue traductor de las obras de Aristóteles y de las de Euclides. Propagador de los *Apices*, o caracteres ideados por los pitagóricos para representar los números.

Sus obras fundamentales son: *De los silogismos categóricos, De la división, Instituciones de la aritmética,* etc.

Por ser muy discutida la autenticidad de sus obras, o escritos que se le atribuyen, no las mencionamos.

El senador Albino fue acusado de mantener acuerdos secretos con el Emperador de Oriente. Boecio fue encargado de su defensa, a la cual le dio tal vigor y fuerza que fue inculpado de alta traición, muriendo entre torturas el año 540.

La planta del tabaco se cultiva principalmente en EE.UU., China, India, U.R.S.S. y Brasil y se caracteriza por sus anchas hojas y la gran altura que puede alcanzar: hasta los dos metros.

Era ya usada por los primeros habitantes de Tobago en sus ceremonias religiosas y fue introducida en Europa a finales del siglo XVI por los conquistadores españoles. La moda se impuso rápidamente y era fumado en pipa o aspirado por la nariz hasta que apareció en forma de cigarrillos cuyo consumo es ya el más habitual. Otras formas de consumirlo es en pipa o como tabaco para mascar.

El tabaco fue considerado por Jean Nicot como planta medicinal sobre todo al alcaloide que contiene y al que dio su nombre: la nicotina y tanto era así que lo envió a Catalina de Médicis para remediar sus jaquecas.

La nicotina resulta ser realmente un excitante que acelera la tensión, el ritmo cardíaco y además en altas dosis resulta tóxico. Afortunadamente se elimina con rapidez por el organismo y nunca alcanza en el cuerpo dosis peligrosas, pero si se abusa del tabaco la nicotina, el dioxido de cerbono y el alquitrán pueden acarrear cánceres de pulmón y garganta, bronquitis y laringitis, problemas cardíacos y dolores de estómago.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha_p}{n^{q-p}} + \frac{\alpha_{p-1}}{n^{q-p+1}} + \ldots + \frac{\alpha_1}{n^{q-1}} + \frac{\alpha_0}{n^q}}{\beta_q + \frac{\beta_{q-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta}{n^{q-1}} + \frac{\beta_0}{n^q}} =$$

$$= \frac{0+0+\ldots+0+0}{\beta_q+0+\ldots+0+0} = \frac{0}{\beta_q} = 0$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{2n^3 + n^2 - 2}$$

Solución

Al ser el grado del denominador mayor que el grado del numerador se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^3 + n^2 - 2} = 0$$

b) Grado del numerador sea mayor que el grado del denominador es decir $p > q$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0}{\beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} = \infty$$

Esto es cierto ya que si hacemos igual que en el caso anterior, dividiendo numerador y denominador por n^p, llegamos a una expresión de la forma.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_p + \frac{\alpha_{p-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_1}{n^{p-q}} + \frac{\alpha_0}{n^p}}{\frac{\beta_q}{n^{p-q}} + \frac{\beta_{q-1}}{n^{p-q+1}} + \ldots + \frac{\beta}{n^{p-1}} + \frac{\beta_0}{n^p}} =$$

$$= \frac{\alpha_p + 0 + \ldots + 0 + 0}{0 + 0 + \ldots + 0 + 0} = \infty$$

Ejemplo

Calcular el $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n^2+1)}{n^3 + n - 1}$

Solución

Si efectuamos el producto que aparece en el numerador tenemos un polinomio de grado «4».

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 1}{n^3 + n - 1} = 0$$

al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

c) Cuando el grado del numerador es igual al grado del denominador $p = q$

se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot n + \alpha_0}{\beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} = \frac{\alpha_p}{\beta_q}$$

En este caso el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.

Ejemplo

Calcular el límite de $\dfrac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - 5}$

Solución

Al ser el grado del numerador y el denominador iguales.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - 5} = 1$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Solución

Si multiplicamos el numerador y denominador por $\sqrt{n}$ nos queda $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{n}$. Si consideramos $\sqrt{n}$ como un polinomio de grado 1/2; entonces ocurre que el grado del numerador es menor que el grado del denominador al ser este 1.

El vidrio es en realidad un estado de la materia, el estado vítreo que es intermedio entre el sólido y el líquido obteniendo un material sólido transparente y frágil.

El vidrio que en principio se realizaba soplando una porción de la masa que es fundía en el crisol, es ahora preparado en hornos de alimentación contínua y se forma bien como vidrio hueco o como vidrio plano que es la forma ordinaria.

Mediante el procedimiento del vidrio colado es obiene una superficie perfectamente plana sin defectos de fusión y por tanto de mayor perfección y menor costo.

Otras formas de vidrio son: al cristal de servicios de mesa que es vidrio con plomo; el vidrio neutro conteniendo ácido bórico que no es atacado por los productos químicos; el vidrio Pyrex que soporta bruscos cambios de temperatura; el vidrio sícila constituido por sílice puro fundido que le hace más resistente al calor; o el temple que tiene cinco veces más la resistencia del vidrio de modo que en colisión se fragmenta en trozos redondeados. También son conocidos los vidrios coloreados mediante óxidos metálicos así: cobre para el azul, cromo para el verde, manganeso para el violeta, o bien carbono para los ahumados.

Las cofradías son asociaciones religiosas puestas bajo la advocación de un santo patrón.

Durante la Edad Media, cofradías y corporaciones estaban muy unidas, por lo que la religión y la profesión se hallaban enlazadas. Las cofradías agrupaban artesanos de distintos oficios y preparaban ceremonias religiosas, se ocupaban de los pobres y administraban las finanzas de la comunidad.

En España aparecieron en el siglo XI, se desarrollaron en el XII y alcazaron gran arraigo durante toda la Edad Media.

Los reyes establecieron cofradías para la defensa de las ciudades de tipo cebelleresco y militar. De las cofradías surgieron los gremios enlazados con ellas o independizados totalmente.

Durante el siglo XV desaparecieron las cofradías, sustituyéndolas los montepíos. En la actualidad son famosas en España las cofradías que organizan las procesiones de Semana Santa en Sevilla, Málaga, Valladolid, etc.

Tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión: $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{5}$

Solución

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:

$$\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{5\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n'})} = \frac{(n+1) - n}{5\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{1}{5(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

$$\frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

ya que la sucesión: $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, es un infinitésimo al ser el límite de $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ infinito.

Ejemplo:

Calcular el límite de la sucesión:

$$\frac{(6n+1)(3n^2+2)}{(n-2)(2n^2-1)}$$

Solución:

Operamos primero los paréntesis:

$$\frac{(6n+1)(3n^2+2)}{(n-2)(2n^2-1)} = \frac{18n^3+12n+3n^2+2}{2n^3-n-4n^2+2};$$

Tenemos dos polinomios del mismo grado en numerador y denominador

Por lo tanto si tomamos límites

$$\lim \frac{(6n+1)(3n^2+2)}{(n-2)(2n^2-1)}$$

$$= \lim \frac{18n^3+12n+3n^2+2}{2n^3-n-4n^2+2} = \frac{18}{2} = 9$$

El límite de la sucesión dada será 9.

Límite de logaritmo

Si tenemos una sucesión a_n que tiende al límite finito y positivo a se verifica

$$\lim_{n\to\infty} (\lg_\alpha a_n) = \lg_\alpha a$$

esto es lo mismo que demostrar que desde un valor de n en adelante, es

$$-\epsilon < \lg_\alpha a_n - \lg_\alpha \alpha < \epsilon$$

si suponemos $\alpha > 1$ y $\alpha^\epsilon > 1$ y $\alpha^{-\epsilon} < 1$ como

$$\lim \frac{a_n}{a} = 1$$

a partir de un determinado valor de n se verificará

$$\alpha^{-\epsilon} < \frac{a_n}{a} < \alpha^\epsilon$$

De donde tomando logaritmos de base α

$$-\epsilon < \lg_\alpha a_n - \lg_\alpha a < \epsilon$$

Como queríamos demostrar.

Ejemplo

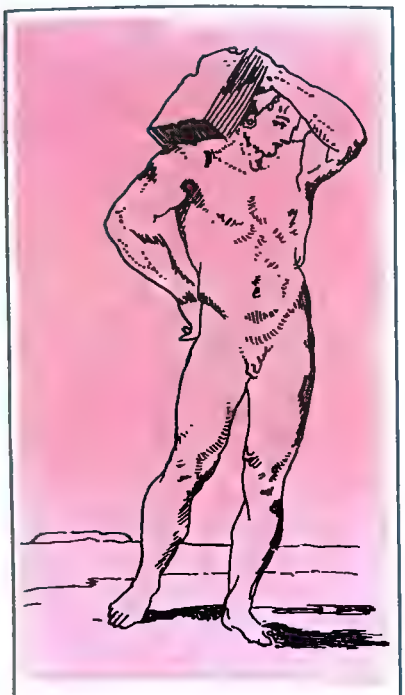
Calcular el límite de la sucesión: $\lg(2^n)$

LEONARDO DA VINCI

NACIO en Vinci (Florencia) en 1452 y falleció en 1519 en Clos-Lucé. Hijo de un notario quien, preocupado por la inclinación de su hijo por la pintura, lo confió a Verrocchio para su enseñanza. Durante los tres años que estuvo con Verrocchio fueron muchas las pinturas que realizó: «La Anunciación» y la «Adoración de los Reyes Magos». En 1482 se trasladó a Milán, y bajo la tutela de Ludovico Moro realizó una estatua ecuestre de Sforza. Esta estatua, de ocho metros de altura, no llegó a fundirse. Ingeniería militar y arquitectura, juntamente con la construcción de la estatua anterior, consumieron dieciséis años de su vida. «La Virgen de las Rocas» (1485); «La Cena» (1500); «Mona Lisa» o «Gioconda» (1500). Muchas otras obras de él se han perdido.

Realizó una intensa labor de investigación dando base a sus doctrinas. Hizo estudios profundos sobre anatomía y perspectiva. Estos estudios fueron hallados tiempos después en manuscritos y en la obra «Tratado de la pintura».

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

Estos estudios han marcado la pauta de grandes pintores, hasta hoy día. Realizó estudios completos de astronomía con un movimiento rítmico, constante y lleno de vida. Trabajos de ingeniería con planos y demostraciones.

En 1515 marchó a Francia, donde realizó estudios arquitectónicos para castillos reales.

En su pintura es famoso por sus claroscuros; sus dibujos, una precisión no sólo matemática sino también científica; su escultura impulsó la medida y la expresión. En fin, sus estudios y obras han sido tan importantes, que adquirió la denominación de «MAGO». Sus obras se encuentran en las bibliotecas más importantes del mundo: Biblioteca Real y Museo Británico de Londres, Biblioteca Ambrosiana de Milán, Biblioteca Vaticana de Roma, Biblioteca Nacional de Madrid. Muchas de sus obras se han perdido a causa del despilfarro de sus herederos. La significación de sus obras ha sido tan inmensa que quizá sea el único artísta-científico más completo de todas las épocas, tanto en pintura como escultura y matemáticas.

Solución

Aplicando las propiedades de los logarítmos, sabemos que:

$$\lg (2^n) = n \lg 2.$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} \lg(2^n) = \lim_{n\to\infty} (n \cdot \lg 2) = \lg 2 \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión: $\lg(\lg \sqrt{\frac{n+1}{n}})$

Solución

Calculamos primero el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^{1/2} = (\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n})^{1/2} = (1)^{1/2} = 1$$

Tomamos límites:

$$\lim_{n\to\infty} [\lg (\lg \sqrt{\frac{n+1}{n}})] = \lg [\lim_{n\to\infty} (\lg \sqrt{\frac{n+1}{n}})] =$$

$$= \lg [\log (\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}})] = \lg (\lg 1) = -\infty$$

Ya que cuando la sucesión $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ va tomando valores muy próximos a uno, el logaritmo de esta sucesión tiende hacia cero y si volvemos a tomar otra vez logaritmos ocurre que la sucesión tiende hacia «$-\infty$» ya que el logaritmo para valores próximos a cero cada vez va siendo menor.

20.3.—Cálculo con límites infinitos.

Vamos a ir viendo con ejemplos los distintos casos que nos pueden aparecer a la hora de calcular límites, cuando el límite de alguna sucesión sea $+\infty$ ó $-\infty$.

Caso a)

$$-\infty + 1 = -\infty \quad \text{y} \quad +\infty + 1 = +\infty$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ y $b_n = \frac{n - 2}{2n}$

Calcular el límite de la suma.

Solución

Se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n - 2}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si hacemos la suma de ambas sucesiones y calculamos su límite:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{2n} = +\infty$$

Se verifica la propiedad anterior

caso b)

$$+\infty + \infty = +\infty \text{ y } (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \frac{n^2 - 3}{n + 1}$ y $b_n = \frac{n^2}{2n - 1}$

Calcular el límite de la suma

Solución

Se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3}{n + 1} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n - 1} = +\infty$$

Si calculamos el límite de la suma de las sucesiones

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \text{Lim}_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 6n + 3}{2n^2 + n - 1} = +\infty$$

Se verifica la propiedad anterior.

No debería evaluarse el grado de civilización de un pueblo por la cantidad de agua que consume sino por su comportamiento ante tan inapreciable recurso natural.

El hombre debe progresar, no hay duda, pero ha de considerar como un paso más en dicho progreso el problema de la contaminación que el avance técnico conlleva.

Prueba de ello es el dramático suceso acaecido en Minamata (Japón) en 1953, cuando empezaron a aparecer enfermos cuyo cuadro clínico presentaba parálisis, convulsiones, perturbaciones mentales e incluso muertes. Según se descubrió años más tarde, el causante fue el metilmercurio arrojado por algunas empresas al mar.

El ciclo biológico natural hacía que los habitantes de Minamata consumieran los peces contaminados con trágicas consecuencias. Pero se siguen dando casos y no sólo en Japón, también en Suecia, Finlandia y Holanda han conocido el horror que provoca el descuido y desprecio del hombre por tan preciado bien.

Según Jean Porst el lavado de las cisternas de los petroleros sin previa decantación de residuos envenena el mar como 50 veces la carga del Torrey Canyon que arrojó al mar 117.000 de Tm. de crudo. No menos peligroso es el vertido de detergentes no biodegradables no reducibles por las bacterias y pensamos que en el 2000 se necesitarán 4 billones de m^3 de agua para calmar la sed de los seres humanos. Pese a la actitud de los desaprensivos la ciencia seguirá luchando.

Una característica fundamental del agua es su salinidad que viene expresada en gramos por mil, de forma que el valor medio está en 35 por 1000.

La salinidad depende de las condiciones metereodinámicas. Así la temperatura elevada supone alto grado de evaporación que aumenta la concentración salina, y en cambio las precipitaciones, la humedad y las aportaciones de la fusión de hielos o nieve o aportaciones fluviales consigue una dilución de las sales, las fluctuaciones de salinidad más sensibles se originan en las zonas costeras debido al intercambio constante con tierra firme.

La salinidad del Mediterráneo varía con la latitud pues en la zona Norte la humedad y el deshielo de Pirineos y Alpes ocasiona la disminución por dilución y en cambio en la zona Sur el clima es más caluroso y seco.

El Báltico varía del 7 por 10000 al 1 por 1000 en las proximidades del golfo de Botnia por la humedad del clima y afluencia de ríos.

Casos extremos son el Mar Rojo con 40 por 1000 y el mar Muerto con 275 por 1000 donde además del clima tienen gran influencia la aportación del Jordán que discurre en su mayor parte por rocas salinas solubles.

Las sales que podemos encontrar en el mar son cloruro de sodio y magnesio, sulfatos de magnesio, calcio y potasio y el bicarbonato cálcico.

Ejemplo

Calcular la suma de las sucesiones.

$$a_n = \log \frac{1}{n} \text{ y } b_n = \log \frac{n+1}{n^2}$$

Solución

Calculamos primero los límites de ambas sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} . (\log \frac{1}{n}) = \log (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (\log \frac{n+1}{n^2}) = \log (\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2}) = -\infty$$

Si calculamos el límite de la suma de las sucesiones

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (\log \frac{1}{n} + \log \frac{n+1}{n^2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\log \frac{n+1}{n^3}) = \log (\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3}) = -\infty$$

caso c)

Si «K» es un número real positivo se verifica:

$$+\infty . K = +\infty \text{ y } -\infty . K = -\infty .$$

Si «K» es un número real negativo se verifica:

$$+\infty . K = -\infty \text{ y } -\infty . K = +\infty$$

Ejemplo

Dadas dos sucesiones $a_n = \frac{1-2n^2}{3n+1}$ y $b_n = \frac{3n^2-2}{2n^2+1}$. Calcular el límite del producto.

Solución:

Calculamos primero los límites de cada una de las sucesiones

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{3n+1} = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$$

Calculamos el límite del producto de las sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-6n^4 + 7n^2 - 2}{6n^3 + 2n^2 + 3n + 1} = -\infty$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ y $b_n = \dfrac{-3n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Calcular el límite del producto.

Solución

Calculamos primero los límites de cada una de las sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n\to-\infty} \left(-3 \cdot \sqrt{\frac{n^2}{n^2 + 1}}\right) =$$

$$= -3 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1}\right)^{1/2} = -3$$

Calculamos a continuación el límite del producto

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-3(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -3\sqrt{\frac{(n^2-1)^2}{n^2+1}} = -3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4-2n^2+1}{n^2+1}\right)^{1/2} = +\infty$$

Por tanto se verifica la propiedad.

caso d)

$$+\infty \cdot +\infty = +\infty \text{ y } +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

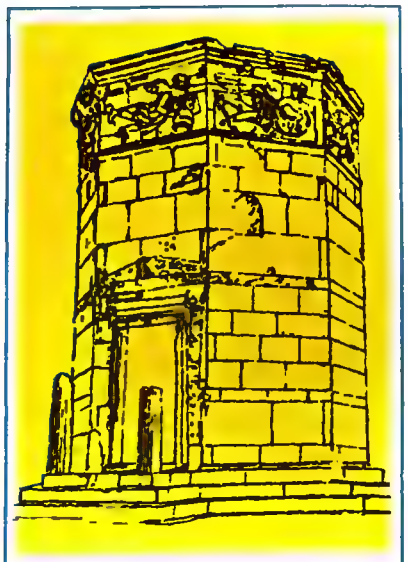
Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3 + 1}}{2n - 1}$ y $b_n = \dfrac{n^2}{3n + 2}$

Solución

Calculamos el límite de las sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{2n - 1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3 + 1}{(2n - 1)^2}} =$$



Esta «Torre de los Vientos» es un antiguo observatorio, en Atenas, que data del siglo I a.J.C. Sobre sus ocho caras están esculpidas figuras que representan los ocho vientos aceptados por Aristóteles.

Aristóteles precede las ideas modernas sobre los frentes polares como causa del tiempo. Para él, los vientos son de dos clases: polar y ecuatorial, y descubrió con sorprendente precisión el tiempo que determina cada uno de ellos.

COMO Y POR QUE FUNCIONA LA PALANCA

Las palancas funcionan según una fórmula sancilla que se ilustra en el ejemplo de la figura *de aquí arriba:* la potencia multiplicada por su distancia al punto de apoyo (brazo de la potancia) es igual a la resistencia multiplicada por su distancia al punto de apoyo (brazo de la resistencia). Por lo tanto, 2 kilogramos de potencia aplicados a una distancia de 4 metros del punto de apoyo, consienten levantar 8 Kg. a una distancia de 1 metro del punto de apoyo.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{4n^2-4n+1}\right)^{1/2} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n+2} = +\infty$$

Calculamos a continuación el límite del producto

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{2n-1} \cdot \frac{n^2}{3n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n^3+1)n^4}}{6n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n^3+1)n^4}{(6n^2+n-2)^2}} = +\infty$$

Ejemplo

Sea $a_n = \frac{1-3n^2}{n+2}$ y $b_n = \frac{2n^2+3n}{n+1}$

Calcular el límite del producto

Solución

Calculamos los límites de las sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3n^2}{n+2} = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n+1} = +\infty$$

Calculamos el límite del producto.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-6n^4-3n^3+2n^2+3n}{n^2+3n+1}\right) = -\infty$$

caso e)

Si K es un número real se verifica que:

$$\frac{K}{+\infty} = 0 \text{ y } \frac{K}{-\infty} = 0$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \frac{3n^2}{n^2+2}$ y $b_n = \frac{n^2+3n-1}{3n+2}$

Calcular el límite del cociente $\frac{a_n}{b_n}$

Solución

Calculamos los límites por separado:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2 + 2} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{3n + 2} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2 + 2}}{\frac{n^2 + 3n - 1}{3n + 2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^3 + 6n^2}{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 4n - 3} = 0$$

caso f)

Si K es un número real mayor que uno $K > 1$

Se verifica que $(K)^{+\infty} = +\infty$ y $(K)^{-\infty} = 0$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $\left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 2}\right)^{n+1}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+2}\right)^{\lim_{n\to\infty} n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$$

Al ser $\frac{3}{2} > 1$

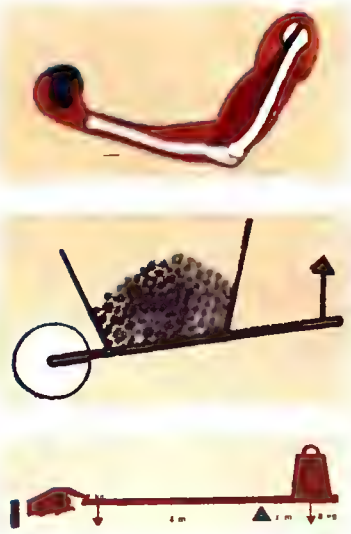
Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$ y $b_n = \left(\frac{n - n^3}{3n^2}\right)$

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)^{b_n}$

Solución:

Primero calculamos los límites de a_n y b_n por separado



UN SURTIDO DE PALANCAS

Existen tres géneros de palancas. Las palancas de 1.º género (barra de la bomba, palanquín) tienen el punto de apoyo entre la potencia y la resistencia. En las de 2.º genero (carretilla) la resistencia se encuentra entre el punto de apoyo y la potencia. Las palancas de 3.º genero (antebrazo humano, excavadora) tienen la potencia entre el punto de apoyo y la resistencia. En los dos primeros géneros, si el brazo de la potencia es mayor que el de la resistencia, con una potencia relativamente pequeña puede vencerse una resistencia de intensidad mucho más elevada. En las palancas de 3.º genero sucede lo contrario.

En la Historia del Derecho son muy curiosas en su estudio las ordalías. Consistían en prendas de tipo mitad mágico o religioso a través de cuyos resultados se pretendía demostrar la inocencia o culpabilidad de un acusado.

Fueron practicados desde la Antigüedad por las más remotas y dispares culturas tomando gran importancia en la Europa de la Edad Media.

Las pruebas eran de muy diversos tipos, desde cruzar ríos peligrosos, ingerir determinada cantidad de pan y queso a la espera de que el arcángel San Gabriel detuviera el alimento en las gargantas de los culpables; caminar sobre brasas o tocarlas, cargar con vigas al rojo, extraer un objeto del plomo fundido.

Algunas tenían carácter realmente macabro como las que suponían que en presencia del cadáver de la víctima las heridas de ésta sangrarían o que el fuego encendido sobre la tumba de la víctima con el humo indicaría el veredicto.

En España había ordalías muy peculiares, como la prácticada en Navarra donde la inocencia se probaba con la mayor duración de un cirio pascual o bien la prueba de los albats en Cataluña consistente en sumergir dos recién nacidos en agua de forma que el que se hundía demostraba la inocencia de la familia o los duelos y combates con asistencia de los reyes.

En España Federico II en 1231 prohibió las ordalías de acuerdo con la constitución de Melfi pero aubsistieron en Europa.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-n^3}{3n^2} = -\infty$$

$$\lim (an)^{bn} = \lim \left(\frac{3n-1}{n+2}\right)^{\frac{n-n^3}{3n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{n+2}\right)^{-\frac{(n^3-n)}{3n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3n-1}{n+2}\right)^{\frac{n^3-n}{3n^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{3n^3-1}\right)^{\frac{n^3-n}{3n^2}}} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0$$

caso g)

Si K es un número real con la condición $0 < K < 1$ se verifica que $(K)^{+\infty} = 0$ y $(K)^{-\infty} = +\infty$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $\left(\frac{n^2-2}{2n^2+n}\right)^{\frac{n^2}{3n-1}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2}{2n^2+n}\right)^{\frac{n^2}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2}{2n^2+n}\right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n-1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

Ejemplo

Dadas las sucesiones $a_n = \frac{n^3}{3n^3-1}$ y $b_n = \frac{3-n^2}{n}$

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)^{b_n}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{3n^3-1}\right)^{\frac{3-n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{3n^3-1}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{3-n^2}{n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\lim_{n\to\infty} -\frac{(n^2-3)}{n}} = 3^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{n}} = 3^{+\infty} = +\infty$$

caso h)

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \left(\frac{3n^2+2}{n}\right)^{n/2}$$

Solución

Calculamos el límite de la base y el límite del exponente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2}{n}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}} = +\infty$$

caso i)

Si «K» es un número real positivo se verifica que

$$(+\infty)^K = +\infty$$

$$\text{Si } K < 0 \Rightarrow (+\infty)^K = 0$$

Ejemplo

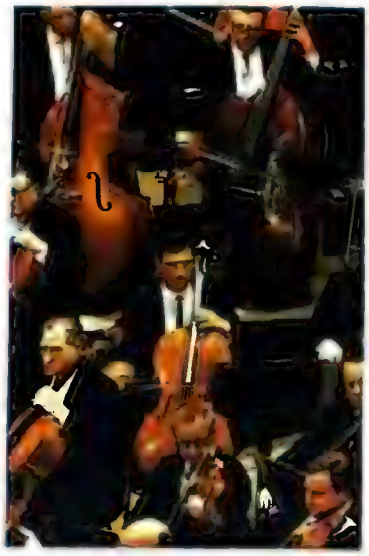
Calcular el límite de la sucesión.

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n+2}}$$

Solución

Ponemos la raíz en forma de potencia

$$a_n = \left(\frac{n^2-1}{n+2}\right)^{1/2}$$



La música no es sólo un arte y un magnífico y hermoso medio de comunicación, sino que su auge y popularización la ha convertido en una industria brillante en este siglo.

Todo este fenómeno se debe sin duda a su comercialización en grabaciones y sobre todo en discos. El disco es de material vinílico muy ligero y su fabricación y distribución puede alcanzar millones de copias. El fundamento de su fabricación se basa en las vibraciones que produce el sonido en su transmisión de modo que si son regogidas por una aguja caliente ésta creará un surco casi invisible en un material.

Así fue como Edison lo pensó y realizó en su fonógrafo, con cilindro de cera mucho menos prácticos que nuestros discos.

Los surcos son estrechos y casi invisibles, puede haber 100 en cada centímetro de radio de un disco de 33 ó 45 revoluciones. El hecho de ser de 33 ó 45 revoluciones indica la velocidad en vueltas por minuto a la que debe girar el disco apra su correcta audición.

Una variante perfecionada de la grabación musical es la estereofonía. Consiste en la grabación conjunta pero en registros separados de los diferentes sonidos. A la hora de ser reproducido el sonido el tocadiscos separa ambos sonidos en sendos altavoces, de este modo la eudición gana en brillantez y riqueza orquestal.

Calculamos el límite de la base

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n + 2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n + 2}\right)\right]^{1/2} = +\infty^{1/2} = +\infty$$

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \left(\frac{2n^2 - 8}{n + 3}\right)^{\frac{1 - 3n}{n + 1}}$$

Solución

Calculamos primero el límite de la base y el límite del exponente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 8}{n + 3} = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3n}{n + 1} = -3$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - 8}{n + 3}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3n}{n + 1}}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - 8}{n + 3}\right)\right]^{-3} = \frac{1}{\left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - 8}{n + 3}\right)\right]^3} = \frac{1}{(+\infty)^3} = 0$$

Ejemplo

Dada la sucesión $a_n = \log \frac{n^3 - 2n}{4n - 5}$ y $b_n = \log \frac{2n^2 - 1}{4n^2 + 3n}$.

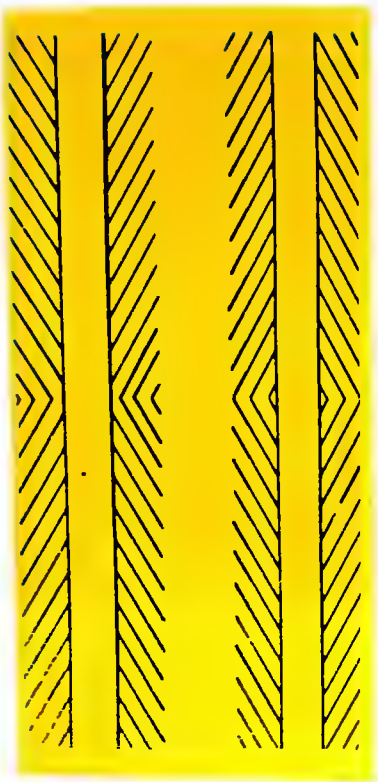
Calcular el límite de la sucesión $(a_n)^{b_n}$.

Solución

Calculamos los límites de a_n y b_n.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\log \frac{n^3 - 2n}{4n - 5}\right) = \log \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n}{4n - 5}$$

$$= \log (+\infty) = +\infty$$



ILUSION OPTICA

Una ilusión óptica hace que estas líneas verticales paralelas parezcan ensancharse (a la izquierde) y estrecharse (a la dereca). Este efecto fue explicado por primera vez en el siglo pasado por el científico alemán Friedrich Zöllner, que avanzó la hipótesis de que líneas divergentes, como las de la izquierde, conducen el ojo hacia el exterior y, por tanto, hacen que el espacio central de las líneas verticales parezca más grande de cuanto lo sea en realidad. Un esquema de líneas convergentes provoca el efecto contrario.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\log \frac{2n^2 - 1}{4n^2 + 3n} \right) = \log \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{4n^2 + 3n} \right) =$$

$$= \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \left[\lim_{n\to\infty} (a_n) \right]^{\lim_{n\to\infty} b_n} = (+\infty)^{\log 2} = \frac{1}{(\infty)^{\log 2}} = 0$$

caso j)

Si «K» es un número real no nulo se verifica que $K^0 = 1$.

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{2n + 1}{3n + 2}}$$

Solución

Expresando la raíz en forma de potencia, obtenemos

$$a_n = \left(\frac{2n + 1}{3n + 2} \right)^{1/n}$$

Calculando el límite de la base y del exponente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 1}{3n + 2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n + 1}{3n + 2} \right) \right]^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

21.—REGLAS PRACTICAS PARA EL CALCULO DE LIMITES DE SUCESIONES REALES O RACIONALES.

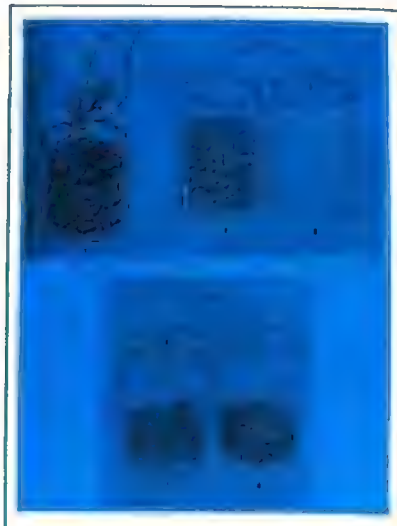
21.1.—Criterio de Stolz

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que cumplan al menos una de las siguientes condiciones.

a) $\lim a_n = \lim b_n = 0$

b) $\lim a_n = \lim b_n = \infty$

c) $\{b_n\}$ es monótona a partir de un cierto lugar y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$



El motivo por el que el tiempo va hacia adelante resalta en un experimento que ilustra la relación, en la distribución de la energía en el universo, entre flujo temporal y cambios. Para el experimento se precisan 3 recipientes, 40 billetes numerados y 40 bolas numeradas que representan la energía. Se comienza con todos los billetes en el recipiente 1, todas las bolas en el recipiente 2 y ninguna bola en el 3. Se extrae al azar un billete (extremo izquierdo) y se transfiere en el recipiente 3 (en el centro) la bola a que se refiere el número correspondiente. Se repone el billete en el recipiente 1 y se repite la extracción: cada vez se transfiere, según el caso, una bola del recipiente 1 y se repite la extracción: cada vez se transfiere, según el caso, una bola del recipiente 2 al recipiente 3 o viceversa. Después de cerca de 25 movimientos los recipientes 2 y 3 contendrán una cantidad casi idéntica de bolas (a la derecha). Ello deriva del cálculo matemático de probabilidades que regula: a) el sucederse de los números extraídos; b) la dirección del flujo de energía; c) y, puesto que el flujo de energía y el flujo del tiempo proceden a la vez, también la dirección del tiempo.

Los delfines son un magnífico ejemplo de la evolución de los seres vivos y su adaptación al medio ambiente. Se trata de animales mamíferos y por tanto de sangre caliente que respiran el oxígeno del aire y amamantan a sus crías. Estos mamíferos abandonaron en tiempos remotos el ambiente terrestre para pasar al marino consiguiendo una adaptación perfecta, de forma que pueblan gran parte de los mares y algunos ríos. Además destacan de el resto de sus compañeros de ambiente por su agilidad, velicidad y alto grado de desarrollo cerebral, de modo que se han convertido en personajes simpáticos para el hombre. Podemos verlos en manadas cuyos componentes son todos machos o todos hembras formándose pareja sólo en primavera, época de reproducción. En cautividad presentan una adaptación muy buena e incluso un nivel de aprendizaje muy alto tanto en centros de investigación como en los acuarios.

Ya en algunos libros se conocían referencias sobre los delfines como en la Odisea y durante mucho tiempo fueron confundidos con las legendarias sirenas.

Entonces se cumple que:

si existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ existe el $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ y ambos coinciden.

21.2.—Criterio de la media aritmética.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente a a. Entonces la sucesión $\{b_n\}$ cuyo término general es

$b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ tiene como límite a.

demostracion

En efecto:

Hagamos $a_i = a + \delta_i$ y consideremos el valor ν de i a partir del cual es $\delta_i < \epsilon/n-\nu$. Tendremos:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{na + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n + \delta_{\nu+1} + \ldots \delta_\nu}{n} =$$

$$= a + \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_\nu}{n} + \frac{(n-\nu)\left(\frac{\epsilon}{n-\nu}\right)}{n} \to a$$

por tender a cero cada uno de los otros sumandos cuando $n \to \infty$

21.3.—Criterio de la media geométrica.

Demostremos a continuación que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1, a_2 \ldots a_n} = a$$

Desde luego $\lim_{n\to\infty} L\ a_n = L\ a$

$$\lim_{n\to\infty} L\ [\sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots a_n}] = \frac{L\ a_1 + L\ a_2 + \ldots + L\ a_n}{n} = La$$

luego: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots a_n} = a$

21.4.—Criterio de la raíz.

A partir de aquí surge el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = a.$$

o sea que si existe $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$ coincide con el $\lim \sqrt{a_n}$

La demostración es muy sencilla

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_2}\frac{a_3}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Aplicando el criterio anterior

La propiedad recíproca no es cierta, pudiendo existir el

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ sin que exista el $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Ejemplos:

Calcular el límite cuando n tiende a ∞ de $\sqrt{n!}$

Aplicando el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

En 1876 los Estados Unidos celebraron el centenario de su independencia preparando una grandiosa feria en Filadelfia, la ciudad donde se firmó la Declaración de Independencia. Con gran sorpresa y placer de los organizadores, no solo todos los estados americanos sino también naciones de Asia, Europa y Sudamérica participaron en la muestra, que fue visitada por casi 10 millones de personas.

Ahora que la guerra civil y la reconstrucción pertenecían por fin al pasado remoto, las industrias nacionales resurgían con vigor renovado y prosperidad. La producción subió a las estrellas. Apenas se instalaban nuevas máquinas cuando ya otras máquinas y otras técnicas se imponían a los antiguos medios. Fue un período de entusiasmo creativo, una era de potencia mecánica.

El símbolo más espectacular de la potencia presentado en la feria de Filadelfia fue la colosal máquina de Corliss a vapor, que surtía energía a todas las demás máquinas que funcionaban en varios pabellones. Y mientras los americanos permanecían con la boca abierta ante la mecánica circundante, los europeos perfeccionaban maravillas incluso mayores. En el mismo año de la feria de Filadelfia, Zénobe Gramme proyectaba con éxito su dinamo; Paul Jablochkoff inventaba un nuevo tipo de lámpara de arco; Nikolaus Otto perfeccionaba el motor de combustión interna. En palabras de la revista *Atlantic Monthly*, la exposición fue «la prueba del poder creativo del hombre».

LA CIENCIA Y LO PARANORMAL

Existe una idea clásica por la cuál creemos que la ciencia se opone a todo tipo de fenómenos paranormales y que los desprecia cuando la realidad no es esa.

A finales del siglo XIX William Crockes químico y físico inglés se ocupó intensamente del estudio de los fenómenos extraños y de telequinesia que producía Daniel Home, un medium escocés.

Crockes no dudó en aplicar la metodología científica clásica para su trabajo trasladando las sesiones de espiritismo a un laboratorio bien iluminado para poder observar debidamente dichos fenómenos.

El científico inglés en su rigor llegó a ingeniar mecanismos y aparatos que le permitieran registrar la intensidad de los fenómenos, como por ejemplo el dinamómetro para medir la fuerza psíquica de Home.

Otra dispositivo de medida creado Crockes fue la balanza que lleva su nombre y que fue: perfeccionando a instancias de Stokes de modo que la fuerza que registrara dicha balanza no fuera debido a fuerzas mecánicas o hidráulicas sino a fenómenos paranormales.

Un trabajo tan riguroso no tuvo gran acogida entre los medios oficiales pero supuso el comienzo de un acercamiento ciencia-parapsicología que aún perdura.

22.—RESUMEN DE FORMULAS UTILES EN EL CALCULO DE LIMITES.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

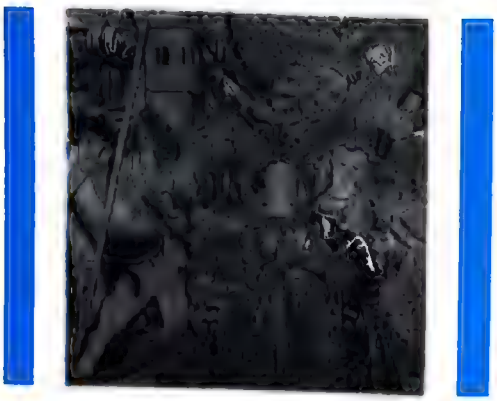
23.—ESTUDIO DE SUCESIONES.

23.1.—Sucesiones recurrentes simples.

Sea $f: I \to R$ donde I es un intervalo de R. Una sucesión u_n está definida por $u_0 \in E$ y la relación de recurrencia $u_{n+1} = f(u_n)$. La función f será supuestamente continua. Si la sucesión es convergente de límite ℓ, entonces.

$$\ell = \lim (u_{n+1}) = \lim f(u_n) = f(\ell)$$

Había que buscar las soluciones de esta ecuación y verificar si la sucesión u_n converge o no hacia un número l. Esta verificación se hará en dos casos:



a) f es creciente en I, entonces la sucesión es monótona si $f(u_0) = u_1 > u_0$ se tiene por recurrencia.

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(u_{n-1}) > u_n$$

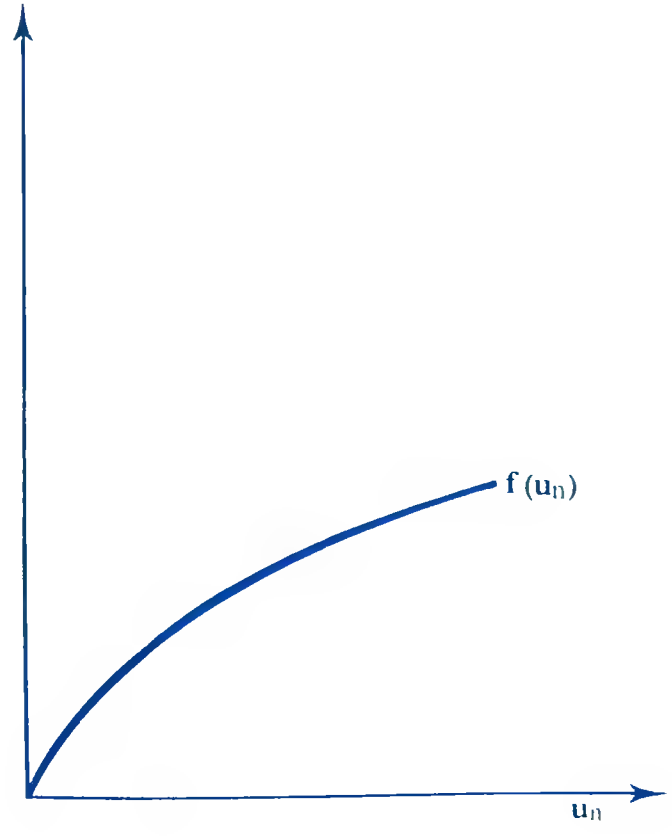
y la sucesión es creciente. Si $f(u_0) = u_1 < u_0$, la sucesión es al contrario decreciente.

El problema es encontrar un mayorante o un minorante que será en general el límite l.

b) f es decreciente en I: la función compuesta $f \circ f$ es creciente y las sucesiones u_{2n} y u_{2n+1} son una creciente y la otra decreciente. Si son convergentes sus límites pueden ser iguales y su límite común es el u_n pero también puede ser distintos

$$f \circ f(l) = l \text{ o } f(l) = f^{-1}(l) \ (f^{-1} \text{ función recíproca}).$$

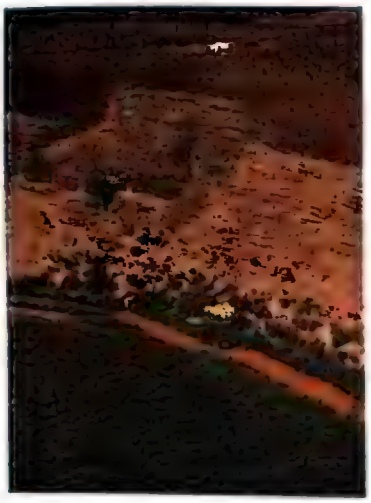
y la sucesión u_n no converge sino en dos valores



ORDENADORES ELECTRONICOS PARA RESOLVER DISPUTAS POR EL AGUA

El 27 de mayo de 1927, un grupo de agricultores californianos hizo saltar con dinamita un acueducto que aprovisionaba a un poblado vecino. Otra «guerra del agua» se había combatido precedentemente, con furor de los campesinos y, recientemente, ha surgido casi una disputa entre los estados de Kansas y Nebraska —disputa resuelta por un computer análogo al representado.
Se temía por varias partes interesadas que los pozos a utilizar para un proyecto de irrigación en Nebraska rebajarían el nivel de la falda acuífera y debilitarían el flujo de un río que hasta entonces regaba los campos de Kansas. Los técnicos consiguieron localizar exactamente los pozos adecuados al proyecto y cuyo disfrute no constituía peligro alguno de merma para el río de los campesinos de Kansas.

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

El cerebro de este ingenio tecnológico es un gigantesco circuito eléctrico que simula las condiciones presentes en un terreno determinado; el uso del agua, las direcciones del flujo y las oscilaciones de la superficie piezométrica en cada uno de los sistemas de agua subterráneos. El ordenador es capaz de preveer las oscilaciones del nivel piezométrico en todos los puntos de la región, basándose en el nivel cuantitativo del agua que se extrae en un período de tiempo establecido. Los adeptos al computer consiguieron reproducir el área de contestación entre Kansas y Nebraska, un sistema de aguas subterráneas que se extiende por más de 19.000 kilómetros cuadrados, sobre un panel de microscópicos circuitos eléctricos muy manejables y con una dimensión de apenas tres metros cuadrados.

En todo caso convendrá verificar que la sucesión está bien definida, es decir que para todo u

$$u_n \in I.$$

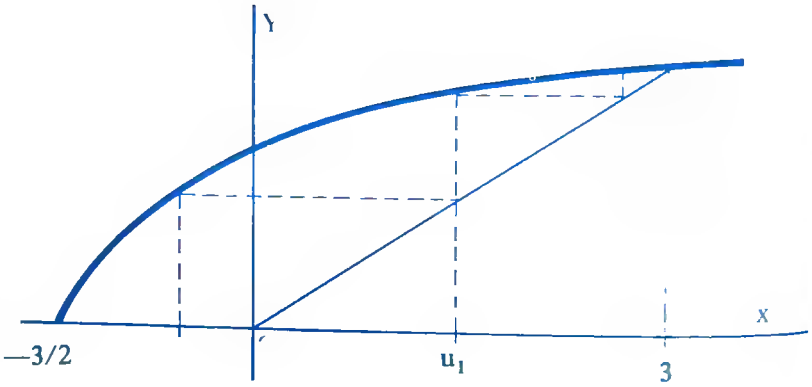
Ejemplo 1

Estudiar la sucesión u_n definida por $u_0 > -\frac{3}{2}$ y $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

Solución

La función $f: x \to \sqrt{2x + 3}$ es definida, continua, creciente en $[-\frac{3}{2}, +\infty)$; un límite posible viene dado por $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$ donde $\ell \geq 0$ y $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$ es decir $\ell = 3$. La sucesión es monótona.

$$u_1 = \sqrt{2u_0 + 3} \geq u_0 \iff \begin{cases} u_0 \leq 0 \\ u_0 \geq 0 \quad u_0^2 - 2u_0 - 3 \leq 0 \end{cases}$$



La sucesión es creciente si $-\frac{3}{2} \leq u_0 < 3$

decreciente si $u_0 > 3$

Para $u_0 = 3$ es constante

El crecimiento de f asegura que

$$u_n \leq 3 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \leq f(3) = 3$$

$$u_n \geq 3 \Rightarrow u_{n+1} \geq 3$$

En definitiva

a) $-\frac{3}{2} \leq u_0 < 3$:

Sucesión creciente mayorada por tanto convergente de límite 3.

b) $u_0 > 3$:

Sucesión decreciente minorada por tanto convergente de límite 3.

El gráfico de f permite explicar este resultado.

Ejemplo 2

Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida mediante la recurrencia

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\{a_n + \frac{1}{a_n}\}$ con $a_1 > 0$. Se pide:

i) Demostrar que esta acotada inferiormente

$$a_1 > 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} > 0$$

Luego esta acotada inferiormente por el cero

ii) Probar que es decreciente a partir del segundo término

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{1}{a_n}}{2}$$

Media aritmética entre a_n y $\frac{1}{a_n}$

y como la media aritmética es mayor que la geométrica.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{1}{a_n}}{2} > \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} > 1$$

$$a_{n+1} > 1$$

Luego si el 1º es menor que 1, el 2º ya es mayor que 1 y a partir de ahí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) - a_n = \frac{1 - a_n}{2\,a_n}$$

Si $a_n > 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0$. Decreciente

y esto ocurre cuando $n = 1$ o sea $a_2 > 1$

$$a_n = a_1 \qquad a_{n+1} = a_2$$

o sea a partir de a_2

El primero puede estar entre 0 y 1 o ser > 1. Si $a_1 = 1$ es constante.

iii) Calcular su límite

Como es decreciente y acotada inferiormente es convergente

BOMBELLI

NACIO Raffaele Bombelli en Borgo, Panigale, cerca de Bolonia, en Italia, y fue gran matemático e ingeniero. Muriendo en el año 1572.

Trabajó en Toscana y sus estudios matemáticos le llevaron a crear un método para resolver ecuaciones de cuarto grado, el cual publicó en un tratado de álgebra que llamó «álgebra, parte mayor de la aritmática», dividido en tres libros.

FERRARI

LUDOVICO Ferrari nació en Bolonia, Italia, en el año 1522, muriendo en la misma en el año 1565.

Al igual que Bombelli, fue un estudioso de las matemáticas y en unión de otros colaboradores, siendo el más importante de ellos Cardan, llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia, que se dedicaba principalmente al estudio del álgebra, con lo que le llevó al descubrimiento de la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto grado. Dio también la demostración de la fórmula para resolver las ecuaciones de tercer grado.

$$a_n \to l$$
$$a_{n+1} \to l$$

$$2\,a_n \cdot a_{n+1} = a_n^2 + 1$$

$$2l^2 = l^2 + 1 \qquad l^2 = 1 \qquad l = \pm 1$$

luego el límite es $+1$ por tener que ser positivo $l = 1$

23.2.—Sucesiones simultáneamente recurrentes.

Ejemplo

$\{u_n\}$ y $\{ v_n \}$ definidas por u_0 y $v_0 > 0$ y las relaciones de recurrencia

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Solución

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0$$

entonces para $\forall n\ u_n > v_n$

Si $u_n \geq v_n, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n$. Decreciente

$$v_{n+1} \geq \frac{2\,v_n^2}{2\,v_n} = v_n \quad \text{Creciente}$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} \underbrace{\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}}_{<1} \leq \frac{u_n - v_n}{2}$$

$$u_n - v_n \leq \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u_1 - v_1 \leq \frac{u_0 - v_0}{2}$$

$$|u_n - v_n| \leq |u_0 - v_0| \frac{1}{2^n}$$

luego $\lim (u_n - v_n) = 0$ tienen el mismo límite y como $u_{n+1} \cdot v_{n+1} = u_n v_n = u_{n-1} v_{n-1} = \ldots u_0 v_0$ luego son dos sucesiones monótonas convergentes al límite $\sqrt{u_0 \cdot v_0}$

Los erizos de mar son animales marinos pertenecientes al tipo equinodermos: del griego ekninos-erizo y derma = piel.

Su aspecto es esférico y cubierto de púas y ambulacros, que son túbulos erectiles terminados en una ventosa.

Estos animales presentan simetría radial y bajo la capa de púas se encuentra un caparazón calcáreo. En la parte central se sitúa la boca con cinco largos dientes y las branqueas; el ano se sitúa por el contrario en la cara dorsal de forma que el aparato digestivo, que es muy elemental, recorre verticalmente al animal. Pese a su primitivo estado, poseen también un elemental aparato circulatorio y un complejo sistema nervioso que es el único mecanismo de defensa que poseen, su medio de desplazamiento.

Para moverse los erizos alargan los pedicelos ambulacrales, que se adhieren con una ventosa a un punto sólido del fondo. Entonces el erizo contrae el tubo aproximándose al punto de adhesión. Los erizos se mueven lentamente, no poseen ojos y tienen difarenciación de sexos.

Pertenecen también al grupo de los equinodermos las holoturias, las ofinvas y las estrellas de mar.

23.3.—Sucesiones con recurrencia lineal.

El concepto de sucesiones que verifican la recurrencia del tipo

$$(\forall n)\ u_{n+p} = \sum_{0}^{p-1} a_k\, u_{n+k}$$

donde $a_0, a_1, \ldots a_{p-1}$ son dados.

Es un espacio vectorial de dimensión p. Una sucesión está entonces definida por $u_0, u_1 \ldots u_{p-1}$. Una sucesión (r^n) con $n \in N$, $r \in C$ o $r \in R$, verifica la recurrencia si

$$r^p - \sum_{0}^{p-1} a_k \,.\, r^k = 0 \qquad \text{ecuación característica.}$$

Si r_1 es una raíz doble se tendrá como otra solución $(n\, r_1^n)$ $n \in N$ y si r_1 es de orden de multiplicidad q, las sucesiones $n\, r_1^n \ldots n^{q-1}\, r_1^n$. Se ha deducido una base del espacio vectorial.

24.—SERIES NUMERICAS.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales o complejos, podemos constituir otra sucesión de la manera siguiente:

$\{S_n\}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Al par $(\{a_n\}, \{s_n\})$ le llamaremos *serie*, a los elementos de la sucesión $\{a_n\}$ les llamaremos *términos* y a los elementos de $\{s_n\}$ les llamaremos *sumas parciales* siendo s_n la suma parcial enésima.

Queda entonces establecido el algoritmo indefinido como toda combinación de las operaciones elementales con la operación de pasar al límite.

La ley para formar cada término de la serie viene dada por una función arbitraria definida de modo que cada término se deduzca de las anteriores o bien en función de su índice.

Las series, como sucesiones que son, pueden ser convergentes divergentes u oscilantes, siendo la suma de la serie:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad \text{en el caso de ser convergente}$$

- Si el límite pertenece a R

$$\lim_{n \to \infty} S_n \in R \Rightarrow \text{CONVERGENTE}$$

Las palabras millón y billón aparecen por vez primera como medida de cantidades en escritos de Alberto Girard, matemático holandés del siglo XVII.

El billón es una cantidad tan grande que se cree que todas las arenas de los mares y oceanos no son suficientes para formarlo. Si nuestro padre Adán hubiese empleado todos los días de su vida, 930 años, en contar y aún viviese hoy, no habría llegado más que a la tercera parte del billón, ya que suponiendo que en cada minuto se cuenten 100 unidades ¡se emplearían 18.000 años!

El Mazdeismo es una antigua religión iraní que prevaleció entre los persas hasta 652 desapareciendo tras la conquista musulmana y en nuestros días es aún practicada por los gabaries y parsis.

No se puede precisar con auténtica exactitud el contenido profundo de la religión pues el Avesta, o Libro Sagrado sólo contiene lo que la tradición oral pudo recoger después de que Alejandro Magno quemara el Libro primitivo.

Lo que sí podemos afirmar es que el mazdeismo era una religión dualista profesada por los magos tal y como a Zaratrusta le fue revelada por Ahura-Mazdā, espíritu del Bien.

El Mazdeismo pretende que el hombre luche junto a Ahura-Mazdā, el Bien, en su lucha contra Ahrimán el Mal, para ello debe hacerse enemigo de la mentira y el error hasta que venza el Bien.

También dividía el tiempo de duración del mundo en dos períodos, primero el nacimiento de los espíritus y en el segundo aparece el primer hombre Gayomart, resultando el total cuatro veces tres mil años.

Los mazdeistas creían en el juicio y resurrección de modo que las almas justas van al mejor de los mundos y las malas a la morada del dolor; los que equilibran malas y buenas acciones irán al Hamestakan. El juicio llegará cuando venciendo el Bien, el Salvador, Sawsyant, libre a las almas inmortales y sobre el viejo mundo cubierto de una capa de metal renacerá un universo.

- si $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty \Rightarrow$ **DIVERGENTE**

- si $\lim_{n\to\infty} S_n \rightarrow$ no existe $\Rightarrow$ **OSCILANTE**, no sumable.

Le hemos dado el nombre de serie a un par $(\{a_n\}, \{S_n\})$ pero lo representamos por la forma general de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Se dice que una serie es sumable cuando su convergencia puede determinarse por criterios sencillos y su suma podemos obtenerla exactamente o con tanta precisión como se desee.

La clasificación de las series tiene difícil solución por lo que se recurre a la comparación de las series con otras más conocidas.

Los términos de una serie pueden ser positivos formando series de términos positivos o bien de términos positivos y negativos; o series alternadas con términos positivos y negativos alternativamente; o series de números complejos.

La condición necesaria para que una serie sea convergente viene dada a partir de la definición de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad S \in R$$

entonces también:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

$$\lim (S_n - S_{n-1}) = \lim a_n = 0$$

Por lo que podemos decir que en toda serie convergente, el término general tiene por límite 0, que es pues una condición necesaria aunque no suficiente.

Veamos dos ejemplos de series «clásicas».

24.1. Serie geométrica

Es el ejemplo más sencillo:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$$

su término enésimo:

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Calcularemos su límite para estudiar su convergencia.

$$|a| < 1; \lim a^n = 0$$

$\lim S_n = \frac{1}{1-a} \Rightarrow$ serie convergente y la suma es $\frac{1}{1-a}$

$|a| > 1, a^n$ crece con n infinitamente y S_n crece infinitamente, la serie es divergente.

para $|a| = 1$. La serie es oscilante: $1 - 1 + 1 - 1 \ldots$

Otro ejemplo muy importante es la llamada serie armónica H_n donde cada término es medio armónico entre los dos contiguos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Si consideramos la siguiente comparación:

$$1 \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5} \geq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} \geq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} \end{array}\right\} \quad 4 \cdot \frac{1}{8} = 1/2$$

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Si la escribimos la suma enésima de la armónica:

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$$

$$\text{donde } 2^n < m < 2^{n+1}$$

$$H_m \geq H_{2n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

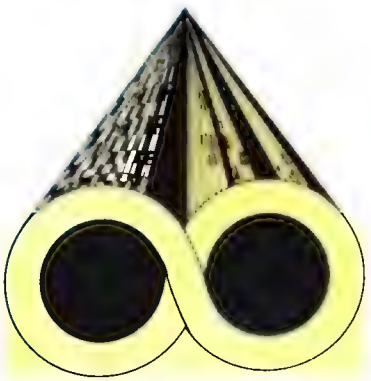
entonces:

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_m$$

Por condición de convergencia:

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{n}{2} \leq \lim_{n \to \infty} H_n = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ES DIVERGENTE.}$$



SIMBOLOS MATEMATICOS

Los matemáticos tienen un lenguaje específico y universal basado en el empleo de símbolos convencionales adoptados por diversos criterios y razones históricas. La evolución del simbolismo matemático tiene su propia historia y en algunas ramas de esta ciencia hay épocas históricas que destacan por sus innovaciones.

Nos referimos al siglo XVI en el campo del Algebra, durante el cuál aparece el símbolo de raíz cuadrada $\sqrt{\alpha}$ en 1525 en una obra publicada en alemán por Christoff Ruddff. Se supone que este símbolo proviene de la inicial de radix, tras sufrir deformaciones en escritura. Para representar raíces cuartas y cúbicas el símbolo se duplica o triplica respectivamente.

Otro símbolo importante es el de la igualdad = que aparece en 1557 en una obra de Robert Recarde. Su autor justifica la forma de este símbolo por no haber nada más igual de dos rectas paralelas.

El símbolo empleado para la representación de infinito: ∞ tiene antecedentes en la forma de representación del mismo que hace Descartes y que parece proceder de la deformación de la escritura de la expresión *ae qualis* que significa igual en latín.

NICOLO FONTANA (Tartaglia)

NACIO en Brescia el año 1499, falleciendo en Venecia en 1557. El nombre de Tartaglia (en italiano tartamudo) fue dedido a una herida que recibió siendo niño durante una invasión de su ciudad natal por las tropas de Gastón de Foix en 1512. Debido a esto, no pudo durante toda su vida articular bien las palabras.

Autodidacta por excelencia, fue profesor en Verona, Venecia y Mantua. Gustábanle sobre manera los juegos matemáticos, y en un torneo o desafío encontró una solución a la ecuación de tercer grado ($x^3 + px = q$) con la cual derrotó a sus adversarios. Comunicó su secreto a Cardeno, el cual no quiso silenciarlo y lo publicó en su célebre «Ars Magna», dando lugar a violentas discusiones con Tartaglia.

Tartaglia, en sus obras «Inventos diversos» y «Tratado general de números y medidas», sacó a la luz pública todos sus descubrimientos (incluido claro está, las ecuaciones de tercer grado). En «Inventos diversos» no sólo trata de álgebra sino que da una lección completa de balística, una concepción nueva para realizar planos, estudios sobre explosivos, etc.

25.– CONSTANTE DE EULER

La serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots$ es divergente

Vamos a calcular $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$ que será la suma de los n primeros términos y conocer el índice de infinitud o sea $\lim_{n\to\infty} H_n$

La sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$ es estrictamente creciente y sabemos que $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ luego $e > (1 + \frac{1}{n})^n$ y tomando logaritmos:

$$1 > n\,L(1 + \frac{1}{n});\ \frac{1}{n} > L\frac{n+1}{n}$$

Por otra parte

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \text{ luego } \frac{1}{e} > (1 - \frac{1}{n})^n$$

y tomando logaritmos

$$L(\frac{1}{e}) > n\,L\frac{n-1}{n} \qquad -\frac{1}{n} > L\frac{n-1}{n}$$

luego

$$\frac{1}{n} > (L(n+1) - Ln) \text{ y por otra parte}$$

$$\frac{1}{n} < L\frac{n}{n-1} \text{ y } \frac{1}{n+1} < L\frac{n+1}{n} = L(n+1) - Ln$$

luego

$$\frac{1}{n+1} < L(n+1) - Ln < \frac{1}{n} \text{ dando valor an hasta n=1}$$

$$\frac{1}{n} < Ln - L(n-1) < \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n-1} < L(n-1) - L(n-2) < \frac{1}{n-2}$$

$$\frac{1}{2} < L2 - L\,1 < 1$$

Sumando tendremos

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} < L(n+1) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1$$

$$H_{n+1} - 1 < L(n+1) < H_n$$

y también $H_n - 1 < L\,n < H_{n-1}$ } De aquí se deduce

$$L(n+1) < Hn < Ln + 1$$

H_n tiende hacia ∞ muy lentamente ya que para pasar por ejemplo de 15 hay que sumar más de un millón de términos.

De la relación anterior y suponiendo $n > 1$

Dividiendo por $L\,n$ $\quad \dfrac{(n+1)}{L\,n} < \dfrac{H_n}{L\,n} < 1 + \dfrac{1}{L\,n}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L\,(n+1)}{L\,n} = 1$ tendremos.

$1 < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{H_n}{L\,n} < 1$ luego.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{H_n}{L\,n} = 1$ luego en $n \to \infty$ son equivalentes.

Vamos a precisar más

La sucesión $E_n = \{H_n - L\,n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos. En efecto

$$E_{n+1} - E_n = H_{n+1} - L(n+1) - H_n + L_n =$$

$$= (H_{n+1} - H_n) - L\frac{n+1}{n}$$

$H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1}$

y como $L\,\dfrac{n+1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$

$E_{n+1} - E_n < 0$

luego la sucesión es decreciente y por otra parte es de términos positivos.

Como $L(n+1) < H_n \Rightarrow L(n+1) - L\,n < H_n - L\,n = E_n$ luego $E_n > 0$.

Luego si es decreciente y es > 0 o sea acotada inferiormente tiene límite y a ese límite se le llama constante de Euler C y su valor es 0,5772.

Luego $H_n = L\,n + C + \epsilon_n$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$

26.- PROBLEMAS Y SOLUCIONES

1. Escribir los ocho primeros términos de la sucesión representada por:

$a_{2n} = \dfrac{a_n - 1}{2} - 2a_n$ y $a_{2n-1} = a_{n-1} + 4$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$ siendo $a_1 = 1 \quad a_2 = 2$.

Solución

Una vez conocidos los dos primeros términos vamos a calcular los demás a partir de estos.

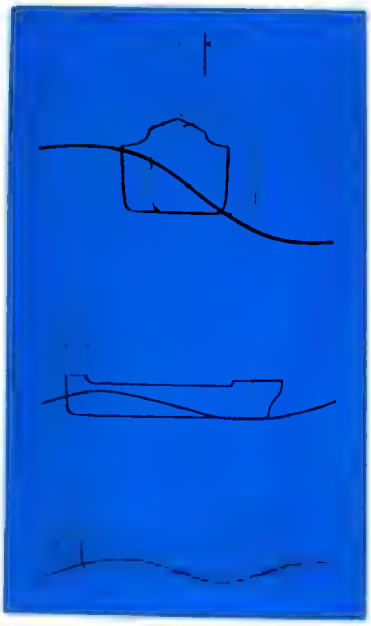
para $n = 2$ obtenemos los términos a_3 y a_4.

$a_3 = a_1 + 4 = 5$

PRUEBAS CON TEMPESTADES HABITUALES

En centros de investigación como el Navy's Taylor Model Basin en los Estados Unidos y el laboratorio Davidson en el Stevens Institute of Technology, especiales aparatos neumáticos controlados por un ordenador electrónico provocan olas artificiales que simulan diversas condiciones del mar, desde la simple borrasca hasta la tempestad. Una serie de sensibles medidores y registradores electrónicos controlan las reacciones de los cascos cuando se balancean, se levantan o cabecean en aguas muy agitadas. Confrontando varios proyectos sobre cascos con velocidades diversas y con ondas regulares de diferente longitud, los ingenieros pueden preveer las probabilidades y el comportamiento de una nave en condiciones adversas para la navegación. Se piensa, ademas, llegar a controlar las diferentes teorías por medio de ordenadores electrónicos sin tener que recurrir a la construcción de modelos previos para los casos.

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

Pero ello corresponde todavía al futuro. Existen, aún hoy, muchos campos de investigación ligados a las pruebas en balsas. Uno de éstos consiste en la búsqueda de equipos contra el balanceo; un tipo nuevo de alerón, por ejemplo, se está estudiando en la actualidad. Se trata de un resalte o saliente similiar al ala de un pequeño aeroplano fijado externamente en los dos lados de la proa, por debajo de la línea de agua. Las pruebas realizadas en modelos con alerones de proa hacen preveer una reducción sensible del balanceo a una velocidad superior a los 15 nudos por hora, por lo que se ha decidido proceder a experimentos a tamaño natural en mercantiles del tipo Mariner. Hasta ahora, las pruebas realizadas en el mar han demostrado que el balanceo puede reducirse en un 20% aproximadamente con el concurso de vientos actuando a una velocidad de 24 nudos. En mares más tempestuosos, con vientos oscilantes alrededor de los 40 nudos, la reducción del balanceo se acerca al 13%.

continúa en la página siguiente

$$a_4 = \frac{a_1}{2} \qquad 2a_2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$$

para n = 3 obtenemos los términos a_5 y a_6.

$$a_5 = a_2 + 4 = 6$$

$$a_6 = \frac{a_2}{2} - 2\,a_3 = 1 - 10 = -9$$

para n = 4 obtenemos los términos a_7 y a_8

$$a_7 = a_3 + 4 = 9$$

$$a_8 = \frac{a_3}{2} - 2a_4 = \frac{5}{2} + 7 = \frac{19}{2}$$

Nos quedará

$$1, 2, 5, -\frac{7}{2}, 6, -9, 9, \frac{19}{2}, \ldots$$

2. Calcular el término general de la sucesión cuyos primeros términos son:

$$0, \frac{3}{10}, \frac{8}{29}, \frac{15}{66}, \frac{24}{127}, \ldots$$

Solución

Observando los términos de la sucesión a partir del segundo se verifica que

$$a_2 = \frac{4-1}{8+2} \qquad a_3 = \frac{9-1}{27+2} \qquad a_4 = \frac{16-1}{4+2} = \frac{25-1}{125+2}$$

Entonces se verifica que el término general de la sucesión será:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2} \qquad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

Vamos a comprobar que el primer término de la sucesión efectivamente es el 0

$$a_1 = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$$

3. Hallar el término general de la sucesión $-1, \frac{2}{5}, +2, \frac{4}{17}, -3, +\frac{6}{37}, \ldots$ y comprobar si esta sucesión tiene límite.

Solución

Si observamos estos primeros términos vemos que los términos impares tienen una relación distinta a los términos pares, por tanto para calcular el término general de la sucesión distinguiremos entre los términos pares y los impares.

Primero estudiamos los términos impares.

$$a_1 = -1,\ a_3 = +2,\ a_5 = -3, \ldots$$

Se verifica que $a_{2n-1} = (-1)^n \cdot n$ donde n = 1, 2, 3, ... los términos pares

$$a_2 = \frac{2}{5},\ a_4 = \frac{4}{17},\ a_6 = \frac{6}{37},\ \ldots$$

Entonces se verifica que $a_{2n} = \frac{2n}{(2n)^2 + 1} = \frac{2n}{4n^2 + 1}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Entonces la sucesión vendrá dada por

$$a_{2n} = \frac{2n}{4n^2 + 1} \text{ y } a_{2n-1} = (-1)^n \cdot n \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Esta sucesión no tiene límite ya que los términos impares no están acotados. En cambio esta sucesión sí posee un punto de aglomeración que es «0» ya que la subsucesión formada por los términos pares tiene como límite el «0».

4. Comprobar si las sucesiones $a_n = \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}$ y $b_n = \frac{3n^3 + n}{2n^2 + 3}$ son monótonas y están acotadas.

Solución

Para calcular que las sucesiones son monótonas estudiaremos la diferencia entre dos términos generales.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} - \frac{(n+1)^2 + 2}{2(n+1)^2 - 1} =$$

$$= \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} - \frac{n^2 + 2n + 1 + 2}{2(n^2 + 2n + 1) - 1} =$$

$$= \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} - \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 4n + 1} =$$

$$= \frac{(n^2 + 2)(2n^2 + 4n + 1) - (n^2 + 2n + 3)(2n^2 - 1)}{(2n^2 - 1)(2n^2 + 4n + 1)}$$

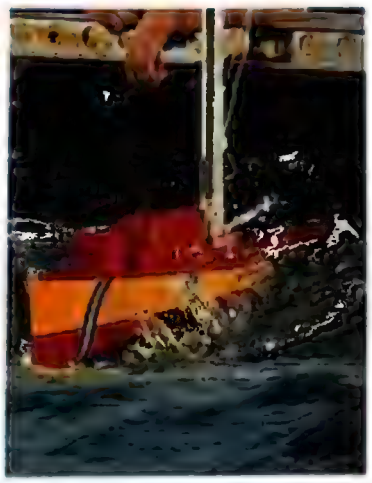
$$= \frac{2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^2 + 8n + 2 - 2n^4 + n^2 - 4n^3 + 2n - 6n^2 + 3}{4n^4 + 8n^3 + 2n^2 - 2n^2 - 4n - 1}$$

$$= \frac{10n + 5}{4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}$$

para cualquier valor de «n» tanto el numerador como el denominador es mayor que «0» luego $a_n - a_{n-1} > 0$ y la sucesión es decreciente.

Lo mismo hacemos para la sucesión b_n

$$b_n - b_{n-1} = \frac{3n^3 + n}{2n^2 + 3} - \frac{3(n+1)^2 + n + 1}{2(n+1)^2 + 3} =$$



viene de la página anterior

Sin embargo, no se ha conseguido resolver el problema más importante. Cuando el alerón toca la superficie el agua, se forma bajo el mismo una gran burbuja de aire y su posterior ruptura hace vibrar la nave. Por ello, se encuentran en fase de experimentación nuevos modelos de alerón. La meta de los constructores marítimos será siempre el encontrar soluciones adecuadas a estos nuevos problemas así como hallar métodos más apropiados para resolver los antiguos. Con la aplicación de las conquistas de la arquitectura naval y con la aplicación de los conocimientos matemáticos se espera proceder con seguridad cada vez mayor y la esperanza de éxito es por consiguiente, así mismo, siempre mayor.

El cliper fue un velero rápido muy usado durante todo el siglo XIX.

Anteriormente a estos veleros, los barcos mercantes eran pesados y muy lentos. Para evitar todos estos problemas se construyeron unos veleros de casco alargado, con arboladuras muy altas y aparejados como goletas o bergantines y que alcazaban mayores velocidades. A estos veleros se les denominó como Baltimore clipper, debido al nombre de la ciudad en que se construyeron los buques más rápidos, de este género.

Hacia 1850, fueron sustituidos por navíos mayores, pero igualmente rápidos, que llevaban tres palos y que realizaban las travesías de San Francisco, Australia y China.

Uno de estos veleros el "Lightuing" podía desarrollar velocidades hasta de 21 nudos.

Posteriormente este tipo de veleros fueron desapareciendo ante los progresos de la navegación e vapor.

$$= \frac{3n^3 + n}{2n^2 + 3} - \frac{3(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1}{2n^2 + 4n + 5}$$

$$= \frac{3n^3 + n}{2n^2 + 3} - \frac{3n^3 + 9n^2 + 10n + 4}{2n^2 + 4n + 5} =$$

$$= \frac{(3n^3 + n)\ (2n^2 + 4n + 5) - (2n^2 + 3)\ (3n^3 + 9n^2 + 10n + 4)}{(2n^2 + 3)\ (2n^2 + 4n + 5)}$$

$$= \frac{6n^5 + 12n^4 + 17n^3 + 4n^2 + 5n - 6n^5 - 18n^4 - 29n^3 - 35n^2 - 30n - 12}{(2n^2 + 3)\ (2n^2 + 4n + 5)}$$

$$= \frac{-6n^4 - 12n^3 - 31n^2 - 25n - 12}{(2n^2 + 3)\ (2n^2 + 4n + 5)} < 0$$

Vemos que para cualquier valor de «n» $b_n - b_{n-1}$ es negativo luego la sucesión será creciente.

Si escribimos los primeros términos de la sucesión a_n serán:

$$a_1 = 3,\ a_2 = \frac{6}{7},\ a_3 = \frac{11}{17},\ a_4 = \frac{18}{35}$$

Comprobamos que todos los términos son mayores que 0 por tanto la sucesión a_n esta acotada. $0 < a_n \leq 3$.

Entonces la sucesión a_n es monótona y acotada luego existirá su límite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Si estudiamos los primeros términos de la sucesión b_n:

$$b_1 = \frac{4}{5},\ b_2 = \frac{26}{11},\ b_3 = \frac{84}{31},\ b_4 = \frac{196}{35}$$

Comprobamos que esta sucesión no esta acotada por tanto no tendrá límite. La sucesión b_n diverge hacia $+\infty$.

5. Escribir los primeros términos de una sucesión que tenga 4 puntos de acumulación. ¿Tendrá límite esta sucesión?

Solución

Podemos encontrar infinitas sucesiones con 4 puntos de acumulación, una de las cuales será:

0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, ...

Los puntos de acumulación en este caso serán: 0, 1, 2, 3.

Esta sucesión no tiene límite, ya que toda sucesión con más de un punto de acumulación no tiene límite, pues este debe ser único.

6. Calcular los puntos de acumulación de las sucesiones.

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n + 1} \text{ y } b_n = \frac{[(2n + (-1)^n . 2n]^2}{n + 1}$$

Comprobar si tienen límite

Solución

Vamos a expresar la sucesión a_n distinguiendo los términos pares e impares:

$$a_{2n} = \frac{1 + (-1)^{2n}}{2(2n) + 1} = \frac{2}{4n + 1}$$

$$a_{2n-1} = \frac{1 + (-1)^{2n-1}}{2(2n-1) + 1} = \frac{1 - 1}{4n - 1}$$

Como los términos impares son todos iguales a 0 o se tiene que el 0 es un punto de acumulación. Además se verifica que el

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n} = 0$$

Por tanto la sucesión a_n tiene un único punto de acumulación que a su vez es el límite.

Hacemos lo mismo para la sucesión b_n es decir, separamos los términos pares y los términos impares.

$$b_{2n} = \frac{[2(2n) + (-1)^{2n} . 2(2n)]^2}{2n + 1} = \frac{(8n)^2}{2n + 1}$$

$$= \frac{16n^2}{2n + 1}$$

$$b_{2n-1} = \frac{[2(2n-1) + (-1)^{2n-1} . 2(2n-1)]^2}{2(2n-1) + 1} = \frac{4n - 2 - 4n + 2}{2(2n-1) + 1} = 0$$

El 0 será un punto de acumulación, al existir infinitos términos nulos. Sin embargo en este caso no es el límite de la sucesión b_n ya que la subsucesión de términos pares no tiene límite.

$$\lim_{n \to \infty} b_{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{16n^2}{2n + 1} = +\infty$$

Los romanos y los chinos ya eran aficionados a las ostras. Se trataba de ostras planas, de concha gruesa y poliácea. Pero hasta el siglo XIX no adquirió importancia la cría de ostras (ostricultura), que consiste en arrancar las larvas que se han fijado en unas rejas apiladas sobre el fondo y depositarlas en viveros.

La ostricultura exige numerosos cuidados y atenciones. Hay que purificar las aguas y defender a las ostras de los peces, las estrellas de mar y otros moluscos que las devoran.

La producción de ostras se realiza todo el año, sin embargo, se recomienda abstenerse de comerlas en los meses "que no tienen r". Es España casi todas las ostras proceden de los bancos gallegos. En Extremo Oriente se cultiva la ostra perlífera por lo fino de sus perlas.

Los mejillones, moluscos de valvas negras se agrupan en racimos sobre las rocas. Su cultivo llamado miticultura consiste en depositar las crías sobre estacas o cuerdas y dejarlas que se desarrollen.

Hay otros moluscos con dos valvas cuya cría no se explota artificialmente, pero que son también, muy apreciados por los gastrónomos así las almejas, navajas, vieira, berberechos, etc.

«La casa del saber», ilustrada en una enciclopedia del siglo XVI muestra las relaciones entre las varias disciplinas académicas medievales. Los dos pisos inferiores representan la gramática. Asomados a las ventanas del tercero están, de izquierda a derecha, Aristóteles (lógica), Cicerón (retórica y poesía) y Boecio (aritmética). En el piso superior vemos a Pitágoras (música), Euclides (geometría) y Ptolomeo (astronomía). Aparecen después Platón (filosofía) y Séneca (moral). En la cima está Pier Lombardo, teólogo italiano del siglo XII, que representa los sumos estudios de teología y metafísica. Al lado, una mujer que se considera inventora del alfabeto romano, conduce al interior a un estudiante pasando una puerta en la que dice «Armonía».

7. Calcular cuántos puntos de acumulación tiene la sucesión

$$a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Solución

Distinguimos entre los términos pares e impares:

Cuando n es un número par se verifica que $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Si calculamos el límite

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Si n es un número impar.

$$a_n = -\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tomando límites

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} -\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = -e$$

Por tanto la sucesión a_n tiene dos puntos de acumulación que son «e» y «—e». Luego esta sucesión no tendrá límite.

8. Encontrar dos sucesiones distintas cuyo límite sea $\frac{1}{2}$.

Solución

Existen infinitas sucesiones de este tipo entre los cuales se encuentran las sucesiones:

$$a_n = \frac{3n^2 + 2}{6n^2 - n + 1}$$

y otra podría ser la sucesión cte. cuyos términos sean todos iguales a 1/2, 1/2, 1/2, ..., 1/2, ...

9. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{\sqrt{16n^2 + 3n - 1} + 5n^2 - n}{n + 2}$$

Solución

Podemos descomponer la sucesión a_n en una suma de sucesiones.

$$a_n = \frac{\sqrt{16n^2+3n-1}}{n+2} + \frac{5n^2-n}{n+2}$$

Tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{16n^2+3n-1}}{n+2} + \frac{5n^2-n}{n+2} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{16n^2+3n-1}}{n+2} + \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-n}{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{16n^2+3n-1}{(n+2)^2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-n}{n+2}$$

$$= \sqrt{16} + \infty = +\infty$$

10. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{\sqrt{3n^2+12n+5} + \sqrt{7n^2+5n}}{\sqrt{n}}$$

Solución

Podemos descomponer la sucesión a_n en una suma de sucesiones

$$a_n = \frac{\sqrt{3n^2+12n+5}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{7n^2+5n}}{\sqrt{n}}$$

Aplicando límites

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+12n+5}}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{7n^2+5n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n^2+12n+5}{n}} + \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{7n^2+5n}{n}} =$$

$$= \infty + \infty = +\infty$$

La cerveza es una bebida alcohólica que al parecer era ya consumida hace cinco mil años por algunos pueblos orientales. La bebida se obtiene tras el proceso de fermentación alcohólica del mosto de cebada germinada y aromatizada con lúpulo pera obtener alcohol y gas carbónico responsable de las burbujas de la espuma.

El gredo de alcohol determina los distintos tipos de cerveza desde las fuertes que pueden pasar de 10° hasta las ligeras que no alcanzan 5°.

La evolución de esta bebida desde la Edad Media la ha llevado desde la cerveza de cebada sin lúpulo de aquella época, hasta la diversidad actual.

Hoy en día los aficionados a este brebaje pueden recrearse con su consumición en locales especiales: las cervecerías y disfrutar de tipos diferentes como: la ale, con más lúpulo, pale-ale más clara que la anterior, la porter oscura y amarga, la fore que lleva trigo candeal no germinado, o la lambia con un alto grado de alcohol.

La cerveza es alabada por muchos por ser nutritiva y saludable ya que la levadura de cerveza tiene propiedades medicinales tal y como demuestran los fármacos que pueden encontrarse en el mercado basados en este producto.

Hay que recordar a los entusiastas de la cerveza que se trata de una bebida alcohólica, cuyos efectos en caso de ingestión masiva desembocan en la embriaguez.

La noción del infinito es nuestro amigo más querido, pero es también el mayor enemigo de la paz de nuestra mente.
JAMES PIERPONT.

Es más fácil conseguir la cuadratura del círculo que tener la razón discutiéndo con un matemático.
DE MORGAN.

Cuando un matemático o un filósofo escribe con una profundidad nebulosa, no dice más que necedades.
WHITEHEAD.

La Matemática tiene la virtud de elevar el alma, obligándola a razonar acerca de los números.
PLATON.

11. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{7n-2}{n}}$$

Solución

Aplicando las propiedades de los límites

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{7n-2}{n}}\right] = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-2}{n}} =$$

$$= 0^7 = 0$$

12. Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\log\left(\frac{2n^2+8}{2n^2-n}\right)}$$

Solución

Calculamos el límite de la base y el límite del exponente por separado.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log \frac{2n^2+8}{2n^2-n}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+8}{2n^2-n}\right) = \log 1 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1^0 = 1$$

13. Calcular el límite de la sucesión.

$$a_n = \left(1 + \frac{5}{n+2}\right)^{3n-4}$$

Solución

Calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n+2}\right)^{3n-4} = 1^\infty$$

vemos que es una indeterminación.

Vamos a resolver la indeterminación del modo que ya conocemos.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} (a_n - 1).b_n}$$

Para este caso concreto

$$e^{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n+2} - 1\right).(3n-4)} = e^{\frac{15n-20}{n+2}} = e^{15}$$

14. Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{-n}$$

Solución

Si hacemos el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{-n} = 1^{-\infty}$$

Nos queda una indeterminación que podemos resolver del modo ya conocido

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} - 1\right)(-n)} =$$

$$= e^{\frac{-4n}{2n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

15. Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(\frac{n^2+7}{3n^2-1}\right)^{\sqrt{n}}$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+7}{3n^2-1}\right)^{\sqrt{n}} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+7}{3n^2-1}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} = 0$$

16. Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

DESARGUES

GERARD o Gaspard Desargues nació y murió en Lión (Francia) durante los años 1593 a 1662.

Fue durante el sitio de La Rochela donde conoció a Descartes. Ya hecha la paz, dejó la milicia y se consagró al estudio de la geometría, enunciando la proposición conocida como «teorema de Desargues» que él llamó involución de seis puntos. Dicho teorema señala como caso particular el de pappus relativo a los segmentos determinados sobre una transversal por las diagonales de un cuadrilátero y sus cuatro lados. Las importantes consecuencias que Desargues sacó de su teorema no han llegado a nosotros, pues desgraciadamente se han perdido, así como su obra «Borrador proyecto de cónicas» que admiró a sabios como Pascal.

El teorema de que «Si dos triángulos, situados en el espacio o en un mismo plano, tienen puestos sus vértices, dos a dos, sobre tres rectas concurrentes en un mismo punto, sus lados se encuentran, dos a dos, en tres puntos situados en línea recta».
El recíproco también es cierto.

Poncelet se basó en este teoreme para su teoría de las figuras homológicas.

Existieron muchas más obras de Desargues sobre perspectiva y trazado de cuedrante que desgraciadamente también se hen perdido.

UN MUNDO SIN RUEDAS

Antes de que existiesen las ruedas, los hombres transportaban las cargas pesadas arrastrándolas. Los primeros vehículos terrestres serían probablemente troncos de árbol huecos (ahuecados) usados por cazadores de la Edad de Piedra para arrastrar los esqueletos de animales a sus campamentos. Hacia el año 5.000 a. J.C. estos toscos medios de transporte se transformaron en trineos —plataformas sobre patines— como las que los Egipcios usaban para trasladar monumentos enormes y grandes bloques de piedra con las que se construyeron las pirámides de Gizé. Llegado el momento de progresar, se usó la rueda probablemente sin estadio intermedio alguno, como aquel de los rodillos fijos. Pero el cambio de trineo a carro no fue completo ni universal.

continúa en la página siguiente

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty} n} = 1^\infty$$

Se trata de una indeterminación, entonces para resolverlo utilizamos el método que ya conocemos.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

17. Dadas las sucesiones $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)^n$ y $b_n = \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n^2}$

Calcular el límite de las sucesiones:

$$a_n \cdot b_n \text{ y } \frac{a_n}{b_n}$$

Solución

Vamos a calcular primero los límites de a_n y b_n por separado.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty} n} =$$

$$= 0^\infty = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n^2} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n}\right)\right]^{\lim_{n\to\infty} n^2} = 1^\infty$$

Resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n^2} = e^{\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3n-2}{3n}-1\right)n^2\right]} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^3-2n^2-3n^3}{3n}\right)} = e^\infty = \infty$$

Calculamos las sucesiones que nos pide el problema:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = 0 \cdot \infty$$

Al tratarse de una indeterminación, lo que hacemos para resolverla, es efectuar primero el producto y después calcular el límite

$$a_n \cdot b_n = \left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n^2} =$$

$$= \left[\left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)\left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n\right]^n$$

Antes de calcular el límite de esta expresión hallamos el límite de cada uno de los términos del producto que forma la base:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{\lim_{n\to\infty} n} = 1^\infty$$

Resolviendo la indeterminación

$$\lim \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3n-2}{3n}-1\right)n\right]} =$$

$$= e^{\lim \frac{-2n}{3n}} = e^{-2/3} = \frac{1}{e^{2/3}}$$

Entonces:

$$\lim a_n \cdot b_n = \left(0 \cdot \frac{1}{e^{2/3}}\right)^\infty = 0$$

Calculamos ahora el límite del cociente:

Si lo hacemos directamente tendremos que:

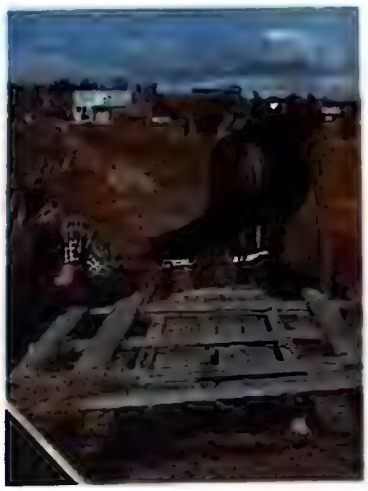
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Vamos a resolver este mismo límite efectuando primeramente el cociente de ambas sucesiones.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)^n}{\left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n^2}} = \left[\frac{\left(\frac{2n+3}{2n^2}\right)}{\left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n}\right]^n$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{0}{1/e^{2/3}}\right)^\infty = 0$$



viene de la página anterior

Los Egipcios usaron los trineos durante mucho tiempo después que la rueda fuese introducida en el valle del Nilo, porque los trineos se deslizaban fácilmente sobre terreno arenoso, mientras que las ruedas tendían a encallar. En Laponia, el trineo se usa desde 5.000 a. J.C. para arrastrar mercancías sobre la hierba y los pantanos en verano y sobre hielo y nieve en invierno.

En el hemisferio occidental, los Indios continuaron usando la *travoise*, un tipo de trineo en forma de V que consistía en dos estacas de madera arrastradas por un perro, incluso después que los europeos llevaran los carros sobre las llanuras americanas. También, cuando los miembros de las tribus se encontraron delante de aquella otra innovación europea —el arrastre con el caballo— rechazaron igualmente poner ruedas tras las estacas; usaron en cambio el caballo en lugar del perro.

TEMA 35

COORDENADAS

INDICE

1.—INTRODUCCION.
2.—COORDENADAS PARAMETRICAS.
3.—COORDENADAS HOMOGENEAS.
4.—TRANSFORMACION DE COORDENADAS CARTESIANAS.
4.1.—En el plano.
4.2.—En el espacio.
5.—COORDENADAS POLARES EN EL PLANO.
6.—COORDENADAS BIPOLARES.
7.—COORDENADAS BIANGULARES.
8.—COORDENADAS PLUCKERIANAS O TANGENCIALES.
9.—COORDENADAS TRILINEALES.
10.—COORDENADAS ESFERICAS.
11.—COORDENADAS CILINDRICAS.

TEMA 35

COORDENADAS

(NOTA: Consultése previamente los capítulos relacionados con los temas de plano y espacio afín y espacio vectorial).

1. INTRODUCCION

Para el estudio de curvas y superficies ya sea en el plano o en el espacio necesitamos unos sistemas de referencia en base a los cuales podremos expresar dichas curvas y superficies.

En cualquier sistema considerado, cuando puede expresarse una de las variables como función de la otra se dice que está en forma explícita $y = f(x)$

Como por ejemplo: $x = a + \cos y$

Cualquiera de las ecuaciones anteriores pueden escribirse en un solo miembro:

$$a + \cos y - x = 0$$

diciéndose que están en forma implícita.

Pero esto último es más general, pudiendo tener una ecuación $f(x, y) = 0$ de forma que no se pueda despejar una variable en función de la otra. Tales ecuaciones, en determinadas condiciones, definen una función, por ejemplo:

$$y = \varphi(x) \text{ tal que } f(x, \varphi(x)) \; \forall \; x \in E(x_0\, y_0)$$

tal que $(x_0\, y_0) = 0$. Se dice que se tiene la función en implícitas o en forma implícita.

No siempre es posible lo anterior, e incluso hay expresiones $f(x, y) = 0$ que no se cumplen para ningún número real. Por ejemplo:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + L(2+x^2+y^2) + e^{x+y} = 0$$

El desarrollo de relatos en escenas sucesivas y el texto de lo que cada personaje dice encerrado en un "bocadillo" aparecieron a finales del siglo XIX siendo empleado por los grandes periódicos de E.E. U.U. tales como New York world y los de la cadena Hearst con historietas de aventuras o con carácter humorístico y que se sucedían de un número a otro.

A partir de 1930 España comenzó a verse invadida por historietas de Tarzan, Flash Gordon, Superman, etc.

En España, sin embargo esta banda diaria en el periódico ha tenido poca importancia limitándose a la publicación de historietas completas o a revistas infantiles.

En la actualidad se editan lujosos albumes de lujo con historias fantásticas protagonizadas por grandes heroinas como Barbarela etc. etc., o bien aventuras protagonizadas por ovnis y extraterrestres.

Las compañías de comercio surgieron a partir del siglo XVI como consecuencia del aumento del comercio y de los grandes imperios coloniales como una forma de colonización y de inter cambio con las nuevas tierras.

En España surgieron las primeras compañías en el siglo XVIII: en 1728 se fundó la Real Compañía de comercio guipuzcoana de Caracas que comerciaba con cacao. En 1740 se constituyó la Compañía de la Habana que traficaba y comerciaba con azucar y tabaco.

Existieron otras compañías dedicadas al comercio interior, la más importante Compañía de los Cinco gremios de Madrid que se extendió por toda la península y tenía casa en Cádiz, fábricas de sedas en Valencia, negociaba con seguros y efectuaba operaciones de banca.

A finales del siglo XVIII, los privilegios comerciales fueron considerados antieconómicos y los monopolios fueron atacados duramente por las llamadas sociedades de amigos del país por lo que las compañías comarciales desaparecieron.

2.—COORDENADAS PARAMETRICAS.

En ocasiones, las coordenadas de un punto vienen dadas en función de una tercera variable (parámetro)

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\}$$

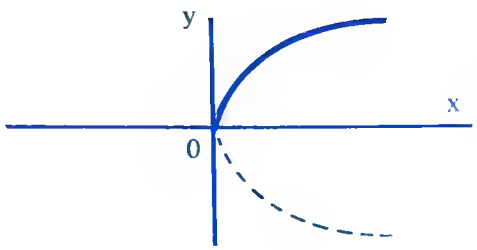
pudiéndose pasar a la forma implícita sin más que eliminar el parámetro, si esto es posible. Se dice que se tienen las ecuaciones de la línea en paramétricas. Aunque se puede eliminar el parámetro, puede convenir realizar el estudio y representación partiendo precisamente de las ecuaciones en paramétricas.

Por otra parte hay que tener en cuenta que al eliminar el parámetro puede haberse introducido un nuevo arco de curva, por ejemplo, si

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^4 \end{aligned}\right\}$$

Esta curva, $\forall$ t real, se ve claramente que se encuentra en el primer cuadrante, mientras que si se elimina el parámetro, se obtiene

$y = x^2$



parábola situada en el primero y cuarto cuadrante habiéndose introducido el arco que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Este problema que se presenta con cierta frecuencia en las curvas dadas en paramétricas dá lugar a lo que se conoce con el nombre «representación impropia» que se tratará más adelante.

El problema inverso, consistente en pasar a paramétricas una curva dada en explícitas o implícitas puede entrañar serias dificultades. Generalmente puede interesar cuando las ecuaciones en paramétricas no resultan complicadas y especialmente si son funciones racionales de un parámetro.

De explícitas a paramétricas se consigue tomando como parámetro la variable independiente.

$$y = f(x) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= t \\ y &= f(t) \end{aligned}\right.$$

De implícitas a paramétricas, el problema no siempre tiene solución (de lo contrario no tendría sentido el estudio de las funciones implícitas). No obstante para casos concretos conviene observar las siguientes reglas:

a) Toda curva de grado n con un punto múltiple de orden (n-1) se puede pasar a paramétricas cortándola por una recta

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

$x_n = f(t)$ la n-sima que junto con $y-y_0 = t(x-x_0)$ nos proporcionan las paramétricas.

Ejemplos:

i) Las cónicas, cortando por una recta que pasa por un punto conocido de la misma

$x^2 - y^2 - 3xu - 5x - 6y = 0$
Punto conocido (0, 0) $y = tx$

$x^2(1 - t^2 - 3t) - x(5 + 6t) = 0$
$y = tx$

$$y = \frac{5 + 6t}{1 - 3t - t^2} \qquad y = t\frac{5 + 6t}{1 - 3t - t^2}$$

ii) La cúbica $x^2 - 2y^2 + 6x^2y = 0$ tiene el (0, 0) doble luego $y = tx$ nos da

$$x = \frac{2t^2 - 1}{6t} \qquad y = tx$$

b) Cuando se logra escribir la ecuación como suma o diferencia de cuadrado de dos funciones lineales (cónicas), las funciones sen y cos o bien sh y ch, resuelven el problema.

Ejemplos:

i) $(x - y + 1)^2 + (2x - 5y + 3)^2 = 7$

$$\left.\begin{aligned} x - y + 1 &= \sqrt{7}\cos t \\ 2x - 5y + 3 &= \sqrt{7}\,\text{sen}\, t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x = x(t) &= \frac{\sqrt{7}}{3}(5\cos t - \text{sen}\, t) - \frac{2}{3} \\ y = y(t) &= \frac{\sqrt{7}}{3}(2\cos t - \text{sen}\, t) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ii) $x^2 - (y - 2)^2 = 4^2$

$$x = 4\,\text{cht} \qquad x = 4\,\text{cht}$$

$$y - 2 = 4\,\text{sht} \qquad y = 2 + 4\,\text{sht}$$

c) En general cortando por una línea que tenga conocidos todos los puntos de intersección menos uno, o dos, se consigue el efecto deseado.

$(x^2 + y^2)^2 = ax^2 + by^2$ - Cuártica bicircular con el origen como punto doble.

Al cortarla por la circunferencia $x^2 + y^2 = tx$ que también pasa por el origen y por los cíclicos nos dá

Ya en el siglo X a.C. los olmecas mejicanos se divertían con un juego parecido al baloncesto, el Pok-ta-Pok.

En el siglo XVI los aztecas jugaban en México una variación del Pok-ta-Pok de los olmecas llamándolo ollamalitzli que consistió en introducir una pelota de goma maciza a través de un anillo de piedra. El jugador que lo consiguiera se vería recompensado con la ropa de los espectadores.

Pero el baloncesto que ahora practicamos tiene su origen en la Escuela Preparatoria del Colegio Internacional Y.M.C.A. (Asociación de Jóvenes Cristianos) en Massachusetts EE. UU. y su creador fue el canadiense Dr. James A. Naismith en diciembre de 1892 y desde entonces su expansión lo ha convertido en deporte mundial siendo desde 1936 la Federación Internacional de Baloncesto Amateur F.I.B.A. la que controla las reglas y competiciones internacionales.

Además los estadounidenses no tienen sólo el mérito de haberlo inventado sino que también son los que han conseguido más títulos olímpicos y tanto la Liga Universiteria como la profesional están repletas de records y magníficos jugadores. Esto justifica que su evolución sea seguida con interés por todo el mundo.

EXTRAÑOS MODOS PARA CALCULAR LA HORA

A medida que desarrollaban su imaginación hasta aplicar movimientos regulares, en una forma u otra, en la medida del tiempo los hombres inventaban extrañas técnicas. Medían el tiempo con velas que se quemaban, con arena que pasaba a través de un orificio, con piedras que caían, con agua que disminuía. De vez en cuando se tenían combinaciones de varios de estos mecanismos, que daban lugar a ingenios raros y elaborados.

continúa en la página siguiente

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y)^2 = ax^2+by^2 \\ x^2+y^2 = tx\end{array}\right\} \qquad x = \frac{bt}{t^2+b-a} \qquad y = \pm\sqrt{tx-x^2}$$

En este caso no resulta función racional la ordenada.

d) Tratando de llegar a la resolución de sistemas entre las variables

$$e^{x^2+y^2} = KL(x^2-y^2)$$

Haciendo $x^2 - y^2 = t$ resulta $x^2 + y^2 = LLt + LK$

de donde pueden despejarse x, e y.

$$x = \pm\sqrt{1/2\,(LLt+LK+t)}; \qquad y = \pm\sqrt{1/2\,(LLt+LK-t)}$$

3.—COORDENADAS HOMOGENEAS.

En coordenadas cartesianas, todos los puntos del plano, excepto los del infinito tienen el mismo tratamiento. Para incorporar estos últimos al tratamiento común se utilizan las coordenadas homogéneas.

Sean (x, y) las coordenadas (absolutas) de un punto P.

Si escribimos $x = \frac{X}{T}$, $y = \frac{Y}{T}$, la terna (X, Y, T), se llama coordenadas homogéneas de P. Ahora, a cada terna corresponde un punto y a este le corresponden infinitas ternas, pues si (X_1, Y_1, T_1) verifica, también verifica (KX_1, KY_1, KT_1) $\forall K \neq 0$.

De esta forma cualquier terna con $T = 0$ representa un punto impropio (del infinito) y $T = 0$ es precisamente la ecuación de la recta impropia. En definitiva tratamos el infinito con el cero.

Ejemplos:

i) (1, 0, 0) punto impropio de 0X
(0, 1, 0) punto impropio de 0Y
(1, m, 0) punto impropio de $y = mx$

ii) En las curvas algebráicas, cortando por $T = 0$ se obtienen los puntos del infinito

$$x^2y^3(2x-y)(x^2-y^2)+x^3+y^2+1 = 0$$

en homogéneas sería:

$$X^2Y^3(2X-Y)(X^2-Y^2)+X^3T^5+Y^2T^6+T^8 = 0$$

y cortando por $T = 0$ da $X^2Y^3(2X-Y)(X^2-Y^2) = 0$

cuyas soluciones son:

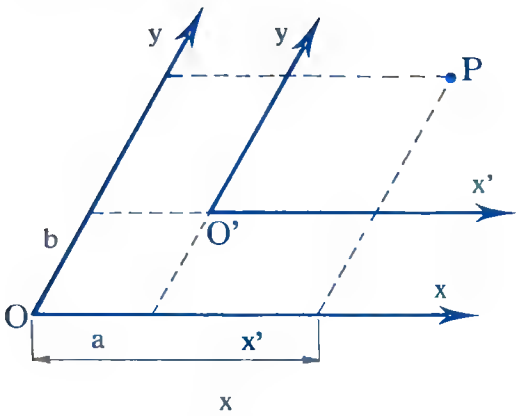
$X = 0$ doble
$Y = 0$ triple
$Y = X$ sencilla
$Y = -X$ sencilla
$Y = 2X$ sencilla

que se corresponden con los puntos impropios (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, —1, 0), (1, 2, 0) respectivamente

4.—TRANSFORMACION DE COORDENADAS CARTESIANAS.

4.1.—En el plano.

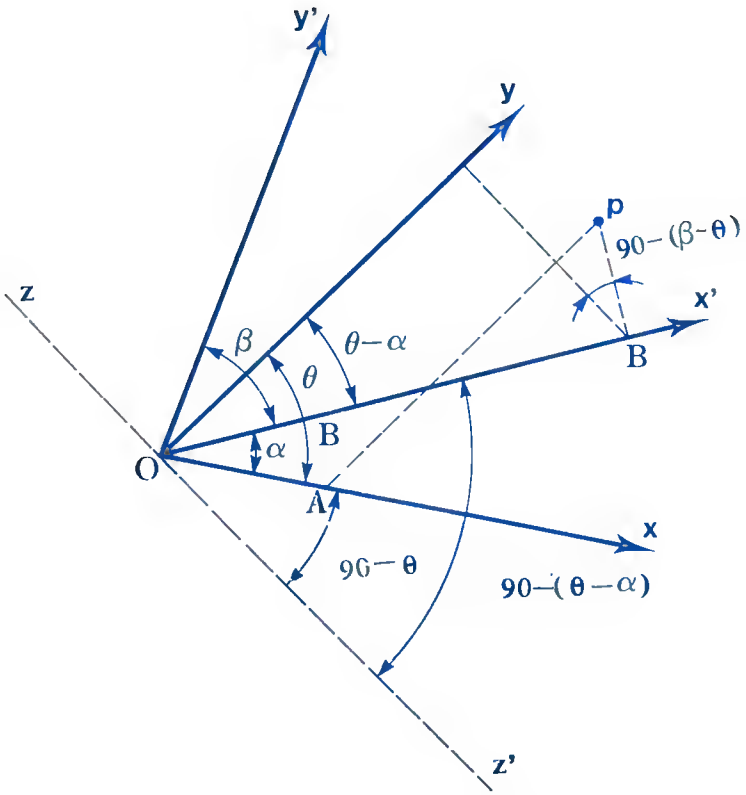
Cambio de origen



$$x = a + x'$$
$$y = b + y'$$

Cambio de dirección sin cambiar el origen

a) ejes cualquiera



viene de la página anterior

Uno de los más notables ejemplares de este tipo es un gigantesco reloj de agua construído en Fez (Marruecos) en el año 1357. La fachada de esta bizarra construcción tenía algomás de 11 metros; el mecanismo de relojería, que no existe ya desde hace mucho tiempo, se supone que ocupaba toda una estancia y que anunciaba la hora con un cacofónico batir de gongs y chirrío de puertas.

Bajo un examen atento, algunas de las extrañas invenciones antiguas muestran elementos que reaparecerían a continuación bajo formas más sofisticadas en el reloj moderno. Una parte de la máquina calculadora astronómica griega demuestra ser un antepasado del mecanismo de relojería moderno. Un enorme reloj chino de agua del siglo XI comprendía un ingenio llamado escape, que más tarde se convertiría en el primer regulador del reloj mecánico.

GALILEO GALILEI

NACIO en Pisa en 1564 y falleció en Arcetri en 1642.

Estudió matemáticas como profesión y como afición, a las que llegó a dominar de tal manera, que a los 25 años fue nombrado profesor de matemáticas de la Universidad de Padua. Fundador del método experimental con la deducción matemática, creando así nuevos métodos, no sólo de enseñanza sino de investigación; y no sólo para matemáticas sino para física y astronomía.

Aplicó el *péndulo* a la medición del tiempo, estudio *las leyes de la caída de los cuerpos.* El movimiento parabólico de los *proyectiles* en el vacío. Principios de las leyes de *inercia.* Estudio de los *sonidos* y sus frecuencias, lo que le llevó también a estudiar los *intervalos musicales.* Estudio de las *resonancias*, los *cuerpos vibratorios.* Uno de los primeros en emplear los *termómetros de líquido*, inventó la *balanza hidrostática*, estudió las leyes de los *vasos comunicantes.*

continúa en la página siguiente

Proyectando O A P sobre ZZ'

$$\text{Proy. OA} = \text{OA} \cos(90 - \theta) = \text{OA} \operatorname{sen}\theta = x \operatorname{sen}\theta$$

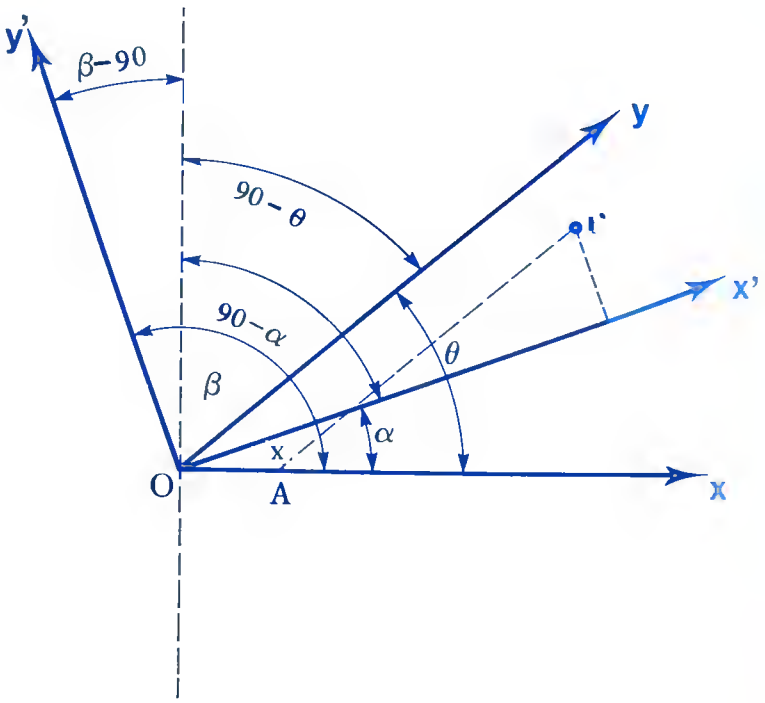
$$\text{proy AP} = 0$$

$$\text{proy OB} = \text{OB} \cos[90 - (\sigma - \alpha)] = \text{OB} \operatorname{sen}(\theta - \alpha) =$$

$$= x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha)$$

$$x \operatorname{sen}\theta = x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{sen}(\theta - \beta)$$

$$x = x' \frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}\theta} + y' \frac{\operatorname{sen}(\theta - \beta)}{\operatorname{sen}\theta}$$



$$y \cos(90 + \theta) = x' \cos(90 + \alpha) + y' \cos(90 + \beta)$$

$$y = x' \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} + y' \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$x = x' \frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}\theta} + y' \frac{\operatorname{sen}(\theta - \beta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

b) Si el primer sistema es rectangular y el segundo no lo es

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta$$

$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\beta$$

c) Si los dos son rectangulares

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$$

d) Cambio general con ejes rectangulares.

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha + a$$

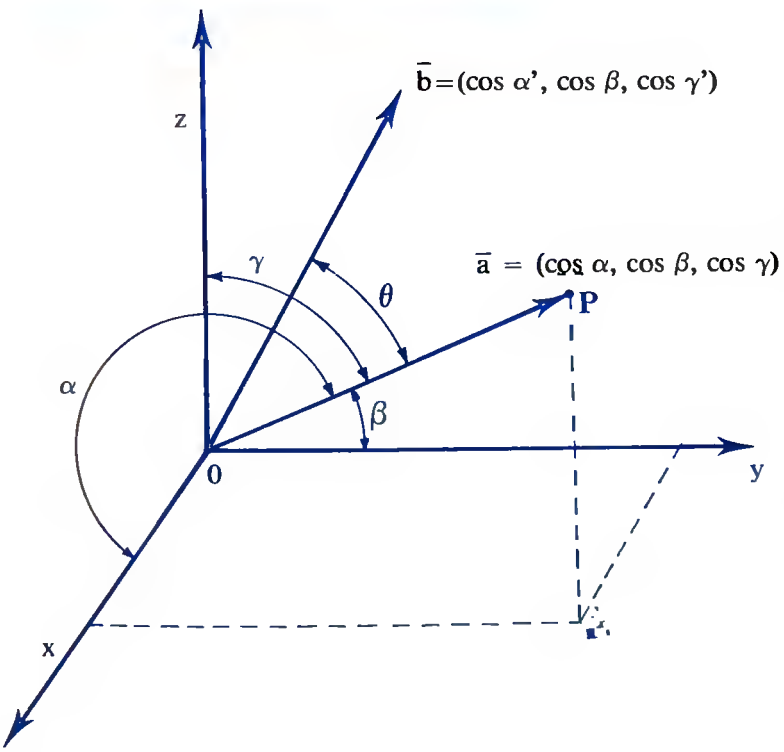
$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha + b$$

4.2.—En el espacio.

a)— Cambio de origen

$$x = a + x' \qquad y = b + y' \qquad z = c + z'$$

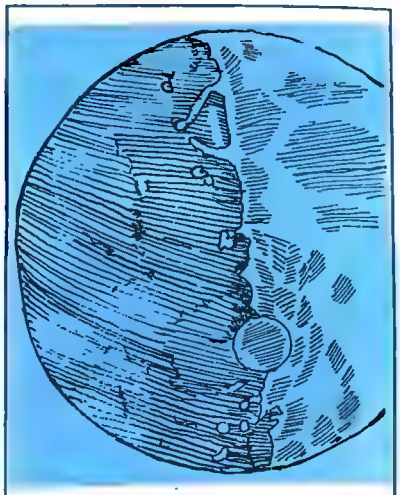
b)— Cambio de la dirección de los ejes



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

$$\theta = 90^\circ; \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$

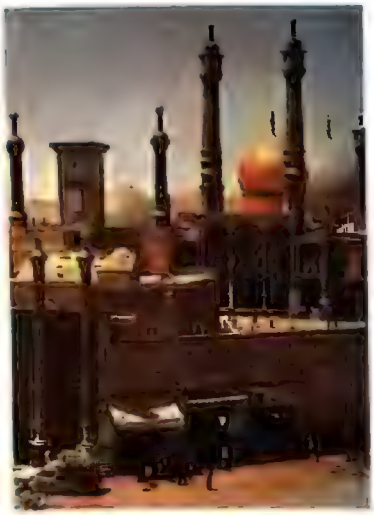
$$\theta = 0^\circ; \cos^2 \alpha^2 + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



viene de la página anterior

En 1610, en Venecia, construyó el *anteojo* que lleva su nombre, comenzando el estudio de los astros. Descubrió los satélites de Júpiter, el anillo de Saturno, las fases de Venus, la rotación del Sol sobre su eje, etc. En 1612 construyó *el primer microscopio*. Su obra de astronomía fue sometida a la inquisición, donde tuvo que comparecer Galileo, con más de setenta años de edad. No quiso defenderse y fue obligado a, de rodillas, abjurar de su doctrina. Orgulloso como todo sabio, cuando se levantó después de abjurar, dijo: «Y sin embargo se mueve». Fue condenado a retirarse a Arcetri en Florencia, donde pasó sus últimos años en la más aterradora miseria. 1636, en este año quedó ciego, hasta que en 1642 le vino la muerte.

«Operaciones del compás geométrico y militar», «Discurso en torno a los casos que están bajo el agua», «Historia y demostración en torno a la máquina solar» son sus obras más importantes. En ellas están expuestos todos sus inventos con sus explicaciones y experimentos.

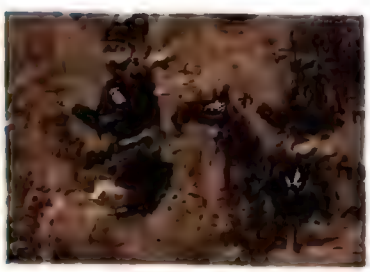


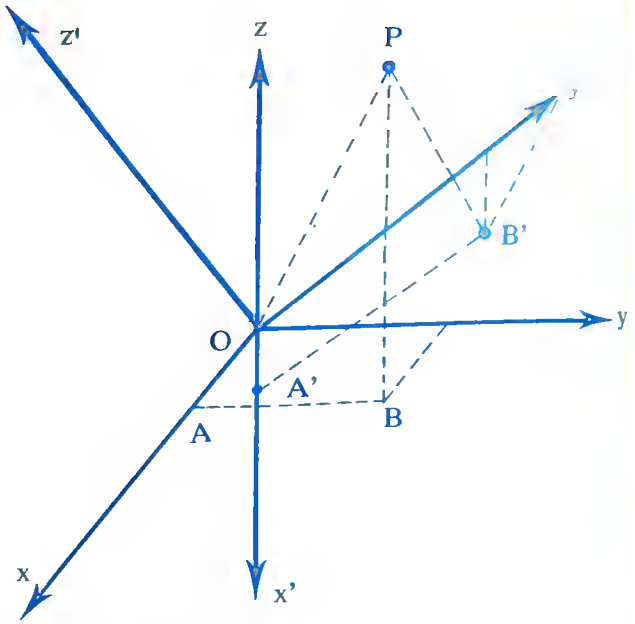
El libro sagrado de los musulmanes está dividido en 114 capítulos llamados azoras y en versículos llamados ayat.

En un principio conservado de memoria, el Corán y su redacción definitiva se remonta a la época del Califa Utman.

Como libro de lecturas litúrgicas, se ha dividido en treinta secciones, de extensión igual llamadas yuz y en sesenta llamadas hizb. La recitación completa del libro se llama jatun.

En principio los musulmanes se opusieron a que su libro sagrado fuera traducido, sin embargo las traducciones del Corán se han multiplicado y en la actualidad existen en todas las lenguas. La primera traducción de todas fue realizada por encargo de Pedro el Venerable. La primera versión a lengua vulgar fue la catalana mandeda hacer por encargo de Pedro.IV.





- Si no son rectangulares ninguna

Proy de O A B P sobre el eje x; $x + y \cos \lambda + z \cos \mu$

Proy de O A', B' P sobre el eje x ; $x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3$

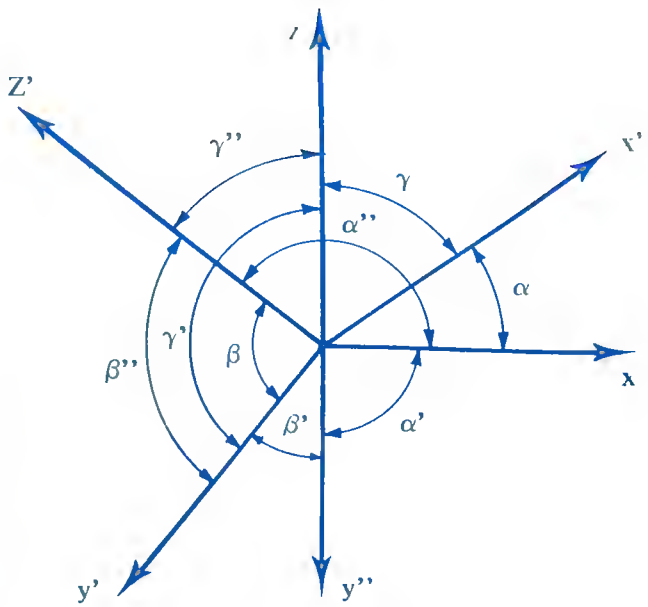
al igual proyectado sobre eje y, sobre el z

$$x + y \cos \lambda + z \cos \mu = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3$$

$$x \cos \lambda + y + z \cos \nu = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3$$

$$x \cos \mu + y \cos \nu + z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_2$$

- Si los primitivos ejes son rectangulares



$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' + z' \cos \alpha''$$

$$y = x' \cos \beta + y' \cos \beta' + z' \cos \beta''$$

$$z = x' \cos \gamma + y' \cos \gamma' + z' \cos \gamma''$$

	x	y	z
x'	α	β	γ
y'	α'	β'	γ'
z'	α''	β''	γ''

Además se ha de verificar

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$
$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1$$
$$\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'' = 1$$

• Si además los nuevos ejes son también rectangulares

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$
$$\cos \alpha \cos \alpha'' + \cos \beta \cos \beta'' + \cos \gamma \cos \gamma'' = 0$$
$$\cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'' = 0$$

También

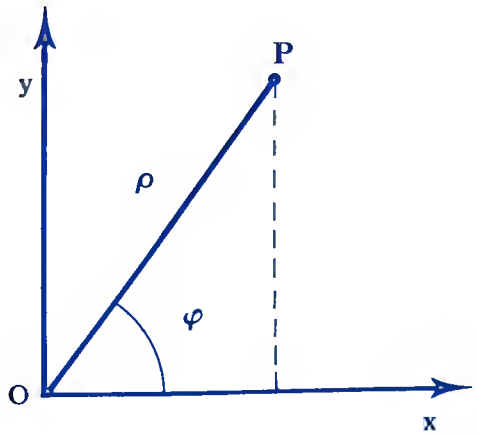
$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha'' \cos \beta'' = 0$$

$$\cos \alpha \cos \gamma + \cos \alpha' \cos \gamma' + \cos \alpha'' \cos \gamma'' = 0$$

$$\cos \beta \cos \gamma + \cos \beta' \cos \gamma' + \cos \beta'' \cos \gamma'' = 0$$

5.—COORDENADAS POLARES EN EL PLANO.

Sea un sistema de referencia ortonormal en el plano y consideremos un punto P(x, y) distinto del origen (0, 0). Este punto puede representarse por la distancia del punto al origen de coordenadas (0, 0) llamando a dicha distancia ρ y por el ángulo que forma el vector OP con el eje de abcisas:



al punto O se le llama polo y al eje OX eje polar

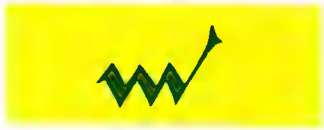
Por lo tanto dado el par (ρ, φ) queda determinado P aunque hay infinitos pares que corresponden a P y por lo tanto hay que restringir el intervalo de variación de φ para $[0, 2\pi)$

SIMBOLOS ANTIGUOS

De igual forma que los actuales símbolos de adición, sustración, multiplicación y división tienen sus precursores, también otros símbolos de abreviación, hoy en día en uso, tienen tras de sí una historia. Los símbolos que empleamos para la raíz cuadrada, para la raíz cúbica y pera el pi griego ($\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, π), aparecen excepcionalmente simples en comparación con las versiones empleadas en el pasado por matemáticos extravagantes.

LA RAIZ CUADRADA

Este signo se deriva de *radix* (raiz) y fue usado por primera vez por Leonardo de Pisa en 1220. El signo actuel $\sqrt{\ }$, que probablemente es una distorsión de la letra «r», nació en Alemania en el siglo XVI.



LA RAIZ CUBICA

Formado por tres radicales de estilo moderno todos unidos entre sí, este símbolo fue creado en 1525 por el matemático alemán Christoff Rudolff. El actual símbolo $\sqrt[3]{\ }$ tuvo su origen en Francia en el siglo XVII.

SIMBOLO DEL PI-GRIEGO

Este símbolo fue propuesto en 1859 por Benjamín Price de Harvard, como alternativa al último modo de indicar el pi griego. El actuel símbolo π, la letra griega «p», fue inaugurado en Inglaterra en el siglo XVIII.

El concepto de función ya aparece en Mesopotamia relacionado con cálculo de astronomía.

Se intentaba encontrar una relación aritmética entre fenómenos que aparecían más o menos ligados en relación con período de visibilidad y distancia de un planeta etc. y con el fin de simplificar los cálculos fabricaban tablas.

Desde muy antiguo los babilónicos estudiaron relaciones como la tabla desde el 26 al 45 de $n^2 + n^3$.

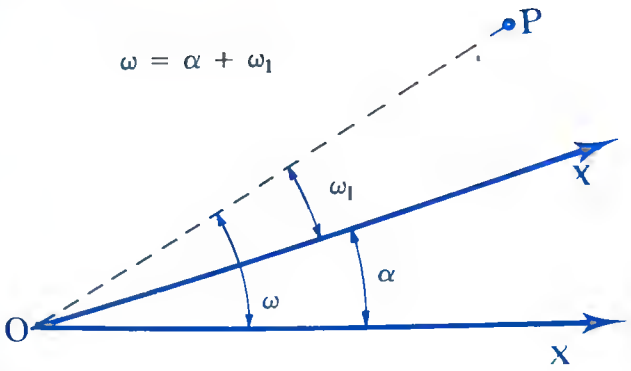
También se conocen tablas de funciones exponenciales con distintos valores de la variable y la correspondiente al cálculo de logaritmos en base a.

No está esclarecido por qué los babilónicos realizaron estas tablas pues no parece sino que estuvieran guiadas más que por curiosidad aritmética.

Hay que reconocer que los babilónicos fueron auténticos apasionados del cálculo y en esta tarea llegaron a ser euténticos «artistas» como inventores del álgebra que son, de forma que incluso la geometría no es empleada como objeto de estudio en sí misma sino como instrumento para plantear problemas puramente algebraicos.

- **Cambio de eje polar:** viene dado por la ecuación

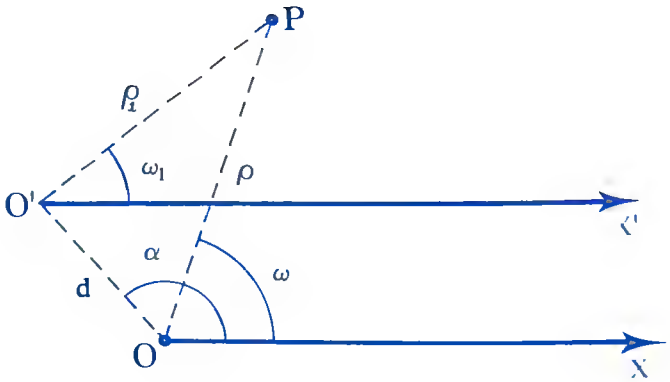
$$\omega = \alpha + \omega_1$$



- **Traslación de eje polar:**

$$\rho^2 = \rho_1^2 + d^2 - 2\,\rho_1\, d \cos(\pi - \alpha + \omega_1)$$

$$\rho^2 = \rho_1^2 + d^2 - 2\,\rho_1\, d \cos(\omega_1 - \alpha)$$



$$\frac{\rho_1}{\text{se}\ (\alpha - \omega)} = \frac{d}{\text{sen r} - (r - \alpha + \omega)}$$

de donde

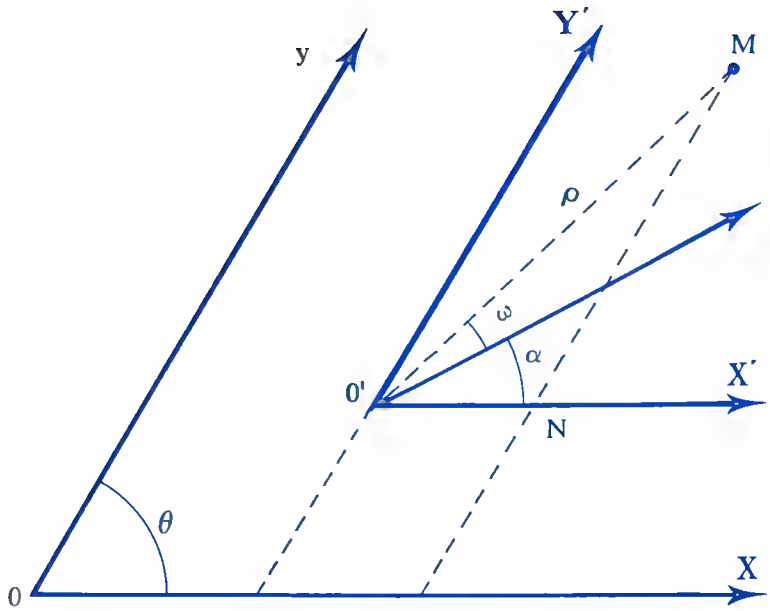
$$\frac{\rho_1}{d} = \frac{\text{sen}\ (\alpha - \omega)}{\text{sen}\ (\omega - \omega_1)}$$

$$\frac{\rho_1}{d} = \frac{\text{sen}\ \alpha \cos \omega - \cos \alpha\ \text{sen}\ \omega}{\text{sen}\ \omega \cos \omega_1 - \cos \omega\ \text{sen}\ \omega_1}$$

$$\frac{\rho_1}{d} = \frac{\text{sen}\ \alpha - \cos \alpha\ \text{tag}\ \omega}{\text{tg}\ \omega \cos \omega_1 - \text{sen}\ \omega_1}$$

$$\text{tg}\ \omega = \frac{\rho_1\ \text{sen}\ \alpha + d\ \text{sen}\ \alpha}{\rho_1 \cos \omega_1 + d \cos \alpha}$$

• Paso de polares a cartesianos



$$\frac{O'\,N}{\text{sen}[O-(\omega+\alpha)]} = \frac{MN}{\text{sen}\,(\omega+\alpha)} = \frac{O'M}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\frac{x-\omega}{\text{sen}\,[\theta-(\omega+\alpha)]} = \frac{y-b}{\text{sen}\,(\omega+\alpha)} = \frac{\rho}{\text{sen}\,\theta}$$

$$x = a + \rho\,\frac{\text{sen}\,(\theta-\omega-\alpha)}{\text{sen}\,\theta}$$

$$y = b + \rho\,\frac{\text{sen}\,(\omega+\alpha)}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\text{Si } \theta = \frac{r}{2}$$

$$x = a + \rho\cos(\omega+\alpha)$$

$$y = b + \rho\,\text{sen}\,(\omega+\alpha)$$

Si el eje polar coincide con el x y el polo coincide con el eje de coordenadas y los ejes cartesianos son rectagulares

$$x = \rho\cos\omega$$

$$y = \rho\,\text{sen}\,\omega$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{tg}\,\omega = \frac{y}{x}$$

Uno de los más espectaculares fenómenos es el huracán, que por su violencia puede provocar auténticas tragedias en las zonas afectadas y según sea la región recibe otros nombres como ciclón, tifón o willywin.

En los huracanes se aprecian tres zonas: una zona central llamada eje donde desaparecen las nubes y la lluvia y se provoca un calor axfisiante; una zona que rodea al eje llamada vértice y otra más externa, orilla.

El huracán tiene su origen en la convergencia de los vientos circulares alisios y contralisios de la zona tropical de la Tierra que tienen sentidos contratios en ambos hemisferios.

Esa convergencia de los vientos provoca corrientes ascendentes y descendentes y de masas de aire caliente y frío alcanzando velocidades de hasta 150 km./h.

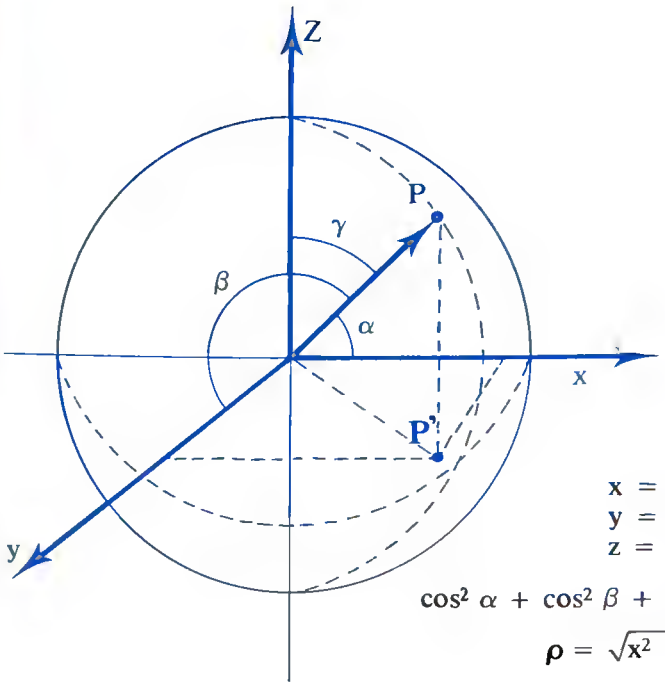
continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Este fenómeno metereológico tiene un especial carácter devastador pues en zonas civilizadas destruye todo tipo de construcciones y en las zonas costeras va acompañado de temporales muy violentos.

Los desastres causados por los huracanes están siendo estudiados para paliar en alguna medida las pérdidas humanas y materiales. En este sentido se estudian materiales de construcción adecuados y en cuanto a su prevención el avance de la meteorología y las imágenes tomadas por los satélites artificiales permiten conocer su desarrollo y predecir su dirección, velocidad, intensidad, etc.

Si consideramos las coordenadas polares en el espacio tenemos:

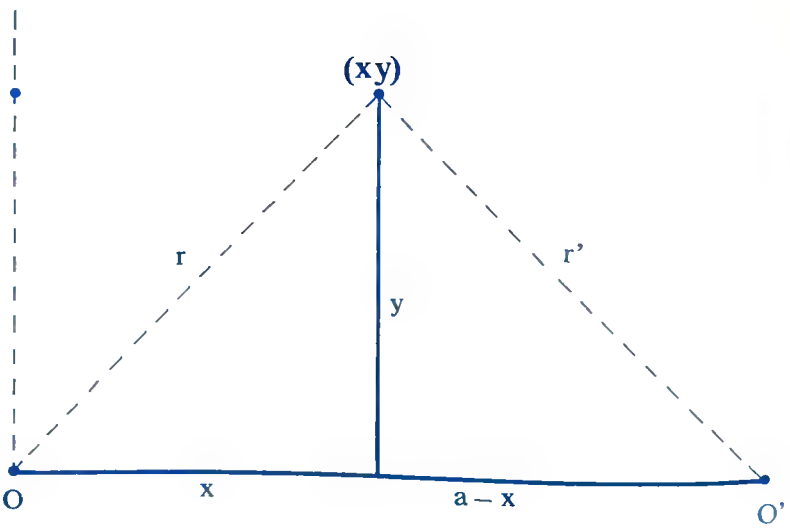


$$x = \rho \cos \alpha$$
$$y = \rho \cos \beta$$
$$z = \rho \cos \gamma$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

6.—COORDENADAS BIPOLARES.



Paso a cartesianos

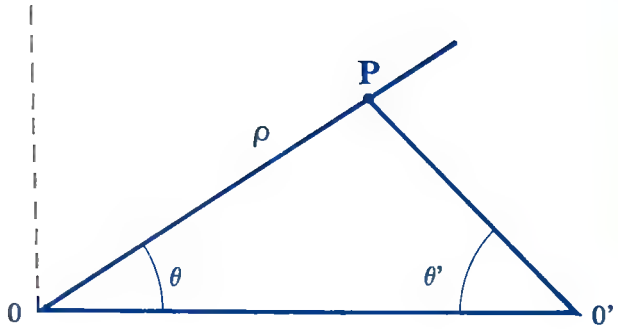
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad r' = \sqrt{(a - x)^2 + y^2}$$

Paso a polares

$r = \rho$

$$r'^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \omega$$

7.—COORDENADAS BIANGULARES.



Paso a cartesianos

$$\theta = \text{arc tg}\,(\pm\frac{y}{x}) \qquad r = a\,\frac{\text{sen}\,\theta'}{\text{sen}\,(\theta+\theta')}$$

$$\theta' = \text{arc tag}\,(\pm\frac{y}{a-x}) \qquad r' = a\,\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,(\theta+\theta')}$$

Paso a polares

$$\theta = \omega \qquad \rho = a\,\frac{\text{sen}\,\theta'}{\text{sen}\,(\theta+\theta')}$$

Ejemplo:

¿Qué representa en coordenadas biangulares $(\theta - \theta') = 7$?

$$\text{tag}\,\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{tag}\,\theta' = \frac{y}{a-x}$$

$$\text{tag}\,(\theta-\theta') = \frac{\text{tag}\,\theta - \text{tag}\,\theta'}{1 + \text{tag}\,\theta\,\text{tag}\,\theta'}$$

$$\text{tag}\,(\theta-\theta') = \frac{\frac{y}{x}+\frac{y}{a-x}}{1+\frac{y^2}{x(a-x)}} = \frac{y\left(\frac{a-2x}{x(a-x)}\right)}{\frac{x(a-x)+y^2}{x(a-x)}} = \frac{y(a-2x)}{x(a-x)+y^2} = K$$

$$ya - 2yx = Kax - Kx^2 + Ky^2$$

$$-Kx^2 + Ky^2 - 2yx + Kax - ay = 0$$

hipérbola equilátera

Idem $(\theta + \theta') = 7$

$$\text{tag}\,(\theta+\theta') = \frac{\text{tag}\,\theta + \text{tag}\,\theta'}{1 - \text{tag}\,\theta\,\text{tag}\,\theta'} =$$

$$= \frac{\frac{y}{x}-\frac{y}{a-x}}{1-\frac{y^2}{x(a-x)}} = \frac{ay}{xa - x^2 - y^2} = K$$

$$-Kx^2 - Ky^2 + Kxa - ay = 0$$

$$K(x^2 + y^2) - Kxa + ay = 0 \Rightarrow \text{circunferencia}$$

DESCARTES

NACIO René Descartes en La Haya, Turena, en 1596 y murió el año 1650 en Estocolmo un 11 de Febrero durante la visita que hizo a la reina Cristina de Suecia, llamado por la soberana, quien quería conconer a tan gran filósofo y matemático.

Sus obras más importantes son: «El Compendio musicae», en 1618. «Regulae ad directionem ingeni», en 1628. «Tratado del mundo o de la luz», de que formaba parte el «Tratado del hombre», en 1633. A los tres tratados escritos en 1637: La Dióptrica, los Meteoros y la Geometría, servía de prólogo el Discurso del método. Luego publicó en latín las «Meditaciones metafisicas», en 1641; el «Principió philosophiae», en 1644; las «Pasiones del alma», en 1649, además de una larga correspondencia con los sabios, filósofos y teólogos del momento.

Creó la geometría analítica, simplificó las notaciones algebraicas y puso los principios del determinismo, según el cual todo hecho tiene una causa y las mismas causas producen siempre iguales efectos.

Son muy importantes sus leyes fundamentales de la reflexión y refracción de la luz.

El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado y la normal en el punto de incidencia están en el mismo plano.

El rayo reflejado es simétrico del rayo incidente respecto a la normal.

Los ángulos de incidencia, i, y de refracción, r, están ligados por la igualdad: seno i = n seno r.

En la que n es el indice de refracción de la segunda sustancie respecto a la primere.

Una de las razas más peculiares del estudio antropomórfico son los pigmeos caracterizados por ser de raza negra y de corta estatura y que se localizan en Africa y Asia. Pertenecientes al grupo oceanoasiático pueden distinguirse en tres tipos humanos diferenciados dentro de este grupo étnico que recibe el nombre de negritos.

Uno de los tipos se sitúa en Filipinas y aunque no es una raza pura tiene caracteres dominantes como una estatura de 1,47 m. de media y cráneo braquicéfalo. Son además el grupo más numeroso.

Los negritos de Andaman constituyen por el contrario un grupo humano reducido en peligro de desaparición. Difieren del resto por tener menos acentuados sus rasgos de raza negra e incluso el color de la piel es más claro. La estatura media está sobre los 1,48 m.

En Malaca se encuentran los semany un grupo reducido y con muchas mezclas de modo que su estatura es de 1,52 m. como valor medio y presentan cráneo mesocéfalo resultado de la mezcla racial del tipo braquicéfalo característico de la raza pura y el tipo dolicocéfalo indonesio.

El único parecido antropológico entre estos pigmeos oceanoasiáticos y los africanos es su pequeña talla que es común y característica.

8.—COORDENADAS PLUCKERIANAS O TANGENCIALES.

Se ha visto que $Ax + By + C = 0$ es la ecuación de una recta cualquiera. Si esta recta no pasase por el origen, ;

haciendo $\frac{A}{C} = u$ $\frac{B}{C} = v$, obtendríamos $ux + vy + 1 = 0$ (0).

es decir que el par (u, v), o la terna (A, B, C) en homogéneas, definiría a la recta. Por esto se dice que la recta tiene por coordenadas (u, v). Correlativamente el punto tendrá ecuación, y será:

$mu + nv + p = 0$ (1) que no es más que la relación entre las coordenadas de las rectas que pasan por él.

En particular pasan las $u_2 = 0$, $v_2 = u_1 = -\frac{p}{m}$, $v_1 = 0$

cuyas ecuaciones serían

$$\left.\begin{aligned} -\frac{p}{m}x + 1 = 0 \\ -\frac{p}{n}y + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$ que se cortan en el punto (m, n, p) (2)

que se asocia a la ecuación (1) y resulta fácil el paso de cartesianas a plückerianas y viceversa.

Análogamente a lo dicho en coordenadas homogéneas, (u, v, w) serían la terna para la recta y $W = 0$ la ecuación del origen (punto límite de las plückerianas).

El plano, en estas coordenadas viene como conjunto de rectas y las líneas como conjunto de sus tangentes, en contraposición a plano como conjunto de puntos y línea como conjunto de puntos que verifica su ecuación cartesiana.

Ejemplos:

Rectas

(0, 1, 0) el OX
(1, 0, 0) el OY

Paralelos a los ejes (a, 0, —1)
(0, b, —1)

Cualquiera que no pasa por el punto límite:
(u, v, w)

Puntos

$u = 0$ impropio de OX
$v = 0$ impropio de OY
$au + 1 = 0$ del eje OX
$bv + 1 = 0$ del eje OY
$au + bv + 1 = 0$, (a, b, 1)

cualquiera ($\neq$ límite)

Ecuación de una circunferencia de centro (a, b) y radio R. Se expresa que la recta (u, v) ($ux + vy + 1 = 0$) dista R del centro.

$$\frac{ua + vb + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = R$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2}(ua + vb + 1)^2$$

$$\text{Si } (a, b) = (0, 0) \qquad u^2 + v^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 \qquad (23)$$

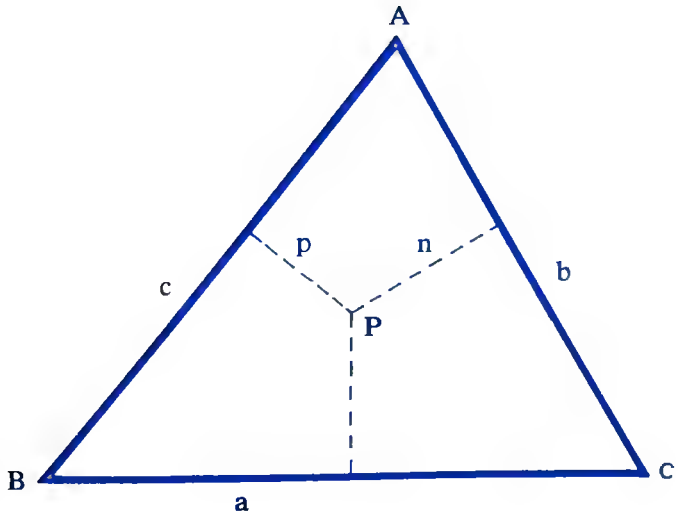
Es útil el empleo de coordenadas pluckerianas en el estudio de tangentes comunes a dos líneas, ya que se reduce a resolver un sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas (u, v).

9.—COORDENADAS TRILINEALES.

Se usan muy poco. Un punto P viene definido por sus distancias m, n, p, a tres rectas que forman triángulo escribiéndose P(m, n, p).

Es evidente que existe una relación entre las tres, la que resulta de expresar el área del triángulo ABC

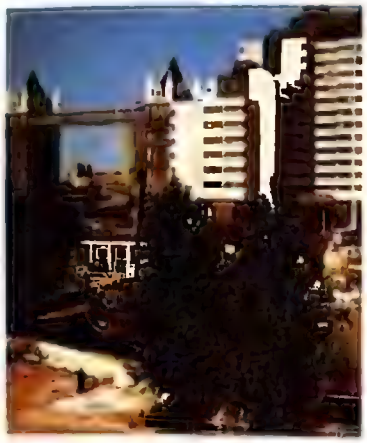
$$am + bn + cp = 2S\ (\overset{\triangle}{ABC})$$



ISAAC NEWTON: UN PIONERO DEL COLOR

Las diferentes teorías sobre la visión de los colores tienen algo en común: todas se basan en el descubrimiento, debido a Isaac Newton, de que la luz solar aparece como blanca porque contiene todos los colores del espectro. Newton tenía 23 años y enseñaba en Cambridge cuando reelizó sus famosos experimentos sobre el espectro, que revelaron que un objeto asume un color porque absorbe algunos colores del espectro y refleja otros. Un limón nos parece amarillo porque su superficie refleja en forma preponderante la parte amarilla del espectro. Los estudios de Newton sobre la luz y el color atrajeron bien poca atención al principio —a menudo, Newton hablabe en aulas casi vacías— y él no intentó describir cómo el ojo y el cerebro percibían el color hasta 1704. Incluso entonces, Newton se limitó, sin embargo, a publicar una serie de conjeturas en forma de «Cuestiones» sin respuesta. En las mismas, avanzaba la hipótesis de que la retina del ojo contanía innumerables receptores de luz, cade uno de los cuales era capaz de reeccionar al estímulo de un solo color, transmitiendo la señal apropiada al cerebro.

Aunque estas cuestiones de Newton podrían sugerir una comparación entre el modo en que el ojo ve el color y el modo en que el oldo escucha las notes musicales, tal analogía es obviemente demasiado simplificeda y tal vez el mismo Newton se dio cuenta. Pero, planteando interrogantes, obligó a los futuros investigadores a confirmar sus sagaces conjeturas o e encontrar explicaciones más plausibles.



La ciudad de Londres fue fundada por lor romanos a principios de nuestra era cuando invadieron Inglaterra, se trataba de un puente para cruzar el Támesis y una pequeña fortaleza a la que llamaron Londinium.

Lo que en principio era un asentamiento militar se convirtió poco a poco en un importante lugar y cuando en el siglo V fue arrasada por los anglosajones contaba con unos 40.000 habitantes. Más tarde pasó a ser la capital del reino de Essex desde donde se combatió la invasión danesa del siglo IX y en el siglo XII contaba con los privilegios que la cerecterizaban como centro político y eún más comercial tras los descubrimientos geográficos.

La superpoblación y el pésimo urbanismo, hace amontonarse a una población de 500.000 habitantes en el siglo XVII, lo que conduce a epidemias como la de 1665 que causó más de 70.000 víctimas y el gran incendio que destruyó el centro de Londres al año siguiente. Todo ello obligó a su reconstruccion que junto a su actividad portuaria y a le fundación de la universidad la han llevado a ocupar un puesto importante entre les grandes ciudades del mundo.

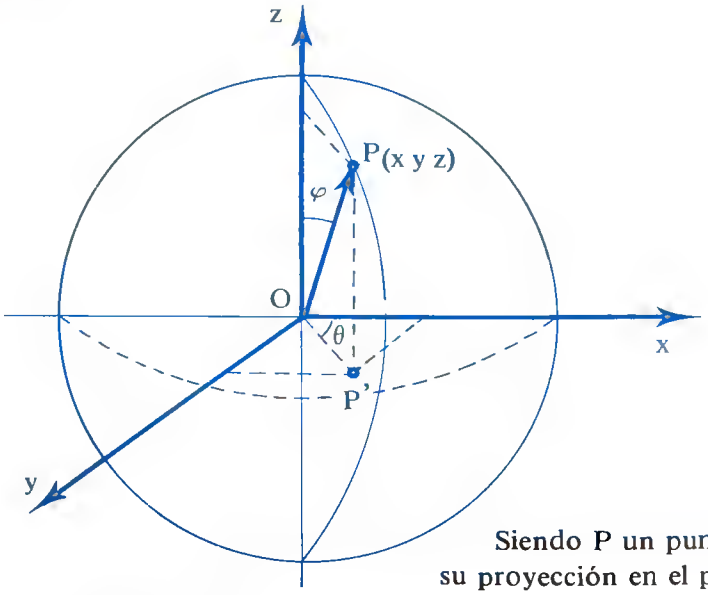
Su activa vida cultural y la peculiar forma de vida que en ella se desarrolla son atractivos que se suman a su encanto, monumentos y museos y hacen que sea visitada por numerosos tutistas.

Elección del sistema de coordenadas y de los ejes.

Una vez comprendido el problema, mediante el croquis previo, es conveniente pensar en cual de los dos sistemas más usuales, cartesiano o polar, se va a emprender la solución del mismo. Para ello conviene tener en cuenta como se expresan cada una de las condiciones geométricas del enunciado en ellos y decidir en consecuencia. Se sabe que la distancia a un punto se expresa muy bien en polares, la distancia a una recta mejor en cartesianas, los ángulos constantes mejor en polares, etc.

10.—COORDENADAS ESFERICAS.

Se define una superficie esférica como un conjunto de puntos que cumplen la propiedad de equidistar de unofijo C que llamamos centro y la distancia de estos puntos y el centro se llama radio.



Siendo P un punto y P' su proyección en el plano xy

ρ = distancia (O, P)

θ = ángulo que forman la recta OP' y OX (eje positivo).

φ = ángulo que forman OP y OZ (eje positivo).

Estas tres coordenadas (ρ, θ, φ) definen el punto P

ρ radio vector	$0 \leq \rho \leq +\infty \rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
θ longitud	$0 \leq \theta \leq 2\pi \rightarrow \operatorname{tag} \theta = \frac{y}{x}$
φ colatitud	$0 \leq \varphi \leq \pi \rightarrow \operatorname{tag} \varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

La relación coordenadas cartesianas-esféricas es:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}$$

11.—COORDENADAS CILINDRICAS.

Consideramos un punto P de una superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = P^2$ y siendo P' su proyección sobre el plano xy

P' pertenece a la esfera de centro O y radio ρ y por lo tanto según las coordenadas polares del plano viene definido por (ρ, θ) de modo que el punto P se determina por (ρ, θ, z) que son sus coordenadas cilíndricas. La relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas es la siguiente:

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$
$$z = z$$

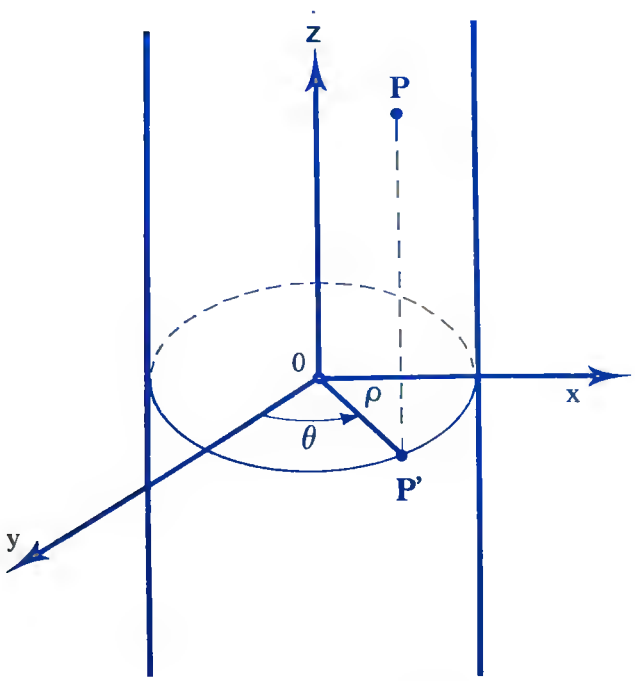
entonces

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \rho^2 \cos^2\theta \\ y^2 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned}\right\} x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad 0 \leq \rho \leq +\infty$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = z \qquad -\infty \leq z \leq +\infty$$



El dibujo es uno de los mejores test psicológicos que existen. Su importancia es tal que casi todos los test infantiles lo incluyen en sus pruebas.

Aparte de los test, el dibujo expresa la vida consciente e inconsciente del niño. Sus sueños, ilusiones, frustraciones, etc. el dibujo siempre es un arte porque es pura creeción. Y ya lo dijo Picasso: «Cada niño es un artista. El problema es si continúa siéndolo cuando crezca».

En el dibujo infantil existen varias fases así a los tres eños dibujará un monigote cabezudo, a los 5 completa la cabeza con tronco y extremidades y a los 7 aparecerá diferencia entre sexos, etc.

Por otro lado el tamaño de las figuras nos da idea de su estado anímico: si las figuras son grandes será un niño extrovertido, si son pequeñas un niño depresivo. El empleo del color rojo indica seguridad en sí mismo, si emplea colores básicos por encima de los 6 años es señal de agresividad. Si es obsesivo dibuja cantidad de mínimos detalles y borra continuamente.

Vemos que con un pequeño dibujo tenemos una gran información sobre el carácter de la persona humana y su desarrollo psicológico.

TEMA 36

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

INDICE

INTRODUCCION
1.—FUNCIONES NUMERICAS. DEFINICION.
2.—FUNCIONES MONOTONAS CRECIENTES Y DECRECIENTES.
3.—FUNCIONES ACOTADAS.
4.—FUNCIONES EN ESCALERA. FUNCIONES CONVEXAS.
5.—OPERACIONES CON FUNCIONES.
6.—LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.
7.—LIMITES LATERALES.
8.—UNICIDAD DEL LIMITE.
9.—ALGEBRA DE LIMITES.
10.—INDETERMINACIONES.
11.—INFINITESIMOS, NOTACIONES Y PROPIEDADES.
12.—FUNCIONES CONTINUAS.
12.1.—Definición.
12.2.—Algebra de funciones continuas.
12.3.—Discontinuidades.
12.4.—Propiedades de las funciones continuas.
12.5.— Composición de funciones continuas.
13.—CONTINUIDAD UNIFORME.
14.—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE NATURAL.
15.—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE ENTERA.
15.1.—Propiedades de las funciones exponenciales de variable entera.
16—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE RACIONAL.
16.1.—Propiedades de la función exponencial de variable racional.
17.—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE REAL.
17.1.—Representación gráfica de la función exponencial de variable real.
17.2.—Límite de la función exponencial de variable real.
18.—FUNCION EXPONENCIAL NEPERIANA.
18.1.—Representación gráfica de la función exponencial neperiana.
19.—ECUACIONES EXPONENCIALES.
19.1.—Sistema de ecuaciones exponenciales.
20.—EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 36

FUNCIONES REALES

DE VARIABLE REAL

INTRODUCCION

Los distintos fenómenos que observamos en la naturaleza están relacionados unos con otros; son independientes. Esta dependencia se manifiesta en las leyes físicas. Estas leyes indican que las distintas magnitudes que caracterian un fenómeno están tan relacionadas que algunas de ellas quedan determinadas por los valores de los demás. Así en un rectángulo su área queda determinada por la longitud de sus lados, etc. Fueron correspondencias de esta clase las que sirvieron de origen al concepto de función.

El problema del análisis, es el estudio de las funciones, esto es de la dependencia de una variable respecto a otra. Se representa por

$$y = f(x)$$

y es función de x.

1. FUNCIONES NUMERICAS. DEFINICION

Dado un subconjunto $A \subset R$ diremos que: $f: A \to R$ es una función; el valor correspondiente a un punto $x \in A$ lo representaremos por $f(x)$. En algunos casos se representara la función por una o varias expresiones analíticas así la función $f(x)$ que a cada

INSTRUMENTOS PRECISOS PARA EL OJO HUMANO

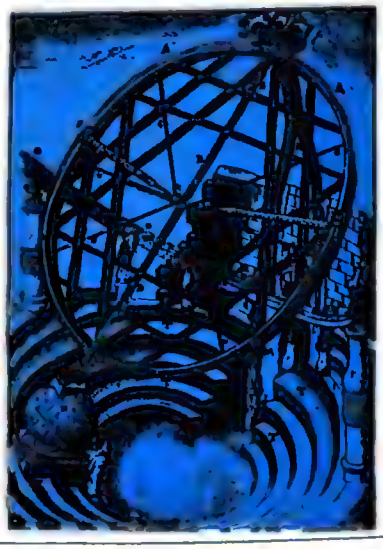
Además del astrolabio, los primeros astrónomos elaboraron muchos instrumentos útiles para consignar en los mapas lo que podía verse a simple vista en el cielo. La «astronomía a simple vista» alcanzó un alto grado de precisión con el trabajo del astrónomo danés del siglo XVI Tycho Brahe.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Brahe tenía solo 14 años cuando un eclipse de sol despertó su interés por la astronomía: comenzó así el trabajo, que duró toda su vida, de buscar y corregir los errores de las tablas astronómicas de su tiempo. El fue el primero en tener en cuenta los efectos de la refracción de la atmósfera al calcular la posición de las estrellas; encuentra sin embargo que algunos errores precedentes se debían a los instrumentos usados, demasiado pequeños e imprecisos. Se convence así de la necesidad de instrumentos mayores, diseñados con mayor precisión y esmero.

continúa en la página siguiente



se representa por

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

Una función con varias expresiones analíticas es la siguiente:

$$R \xrightarrow{f} R \qquad \begin{array}{ll} \forall\ x < 0 & f(x) = -1 \\ x = 0 & f(0) = 0 \\ \forall\ x > 0 & f(x) = 1 \end{array}$$

Esta función se suele escribir $f(x) = \text{sgn}(x)$.

En general toda función, definida en un conjunto cualquiera A, con valores en R, se dice función numérica o función real, cuando $A \subset R$ hablamos de función real de variable real. Al conjunto A lo llamamos campo de definición de la función y al conjunto R, campo de valores de la función.

La ordenación en R induce una ordenación en el conjunto de funciones de A en R.

Sean: $A \xrightarrow{f_1} R$ $\quad A \xrightarrow{f_2} R.$

diremos que $f_1 \geq f_2$ si y solo si

$$\forall x \in A \qquad f_1(x) \geq f_2(x)$$

Esta relación de orden es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

El orden no es total pero tenemos la propiedad siguiente:

Dos funciones cualesquiera, f_1, f_2 de A en R admiten una función posterior a ambas:

$$f: A \to R \qquad x \in A,\ f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$$

admiten una función anterior común:

$$g: A \to R \qquad \forall x \in A \qquad g(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$$

Funciones no-negativas son aquellas

$$\forall X \in A\ f(x) \geq 0$$

Funciones positivas son aquellas

$$\forall x \in A, \qquad f(x) > 0$$

igualmente definimos funciones no-positivas y negativas

Definimos la función nula mediante:

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in A$$

2. FUNCIONES MONOTONAS CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función real de variable real $f: A \to R$ con $A \subset R$ se dice

no-decreciente si	$\forall(x < y)$	$\Rightarrow$	$f(x) \leq f(y)$
creciente cuando	$\forall(x < y)$	$\Rightarrow$	$f(x) < f(y)$
no creciente cuando	$\forall(x < y)$	$\Rightarrow$	$f(x) \geq f(y)$
decreciente cuando	$\forall(x < y)$	$\Rightarrow$	$f(x) > f(y)$

Todas las funciones anteriores reciben el nombre de funciones monótonas.

3. FUNCIONES ACOTADAS

Una función $f: A \to R$ se dice acotada si el conjunto $f(a) \subset R$ está acotado. Se puede hablar de acotada superior o inferiormente. Una función tan simple como la función de R en R definida por $f(x) = x$, es una función no acotada.

Si una función está acotada superiormente definimos como extremo superior de una función acotada $f: A \to R$ al extremo superior del conjunto $f(A) \subset R$. Analogamente se define el extremo inferior.

Dadas las funciones de A en R $f_1, f_2, \ldots f_m$ se llama envuelta superior de las mismas a la función $f: A \to R$ definida por:

$$\forall x \qquad f(x) = \max (f_i(x))$$

Si tenemos una sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots f_n$ la envuelta superior, cuando existe, se define

$$\forall x,\ f(x) = \text{extr. sup. } (f_i(x))$$

Podemos definir igualmente la envuelta inferior.

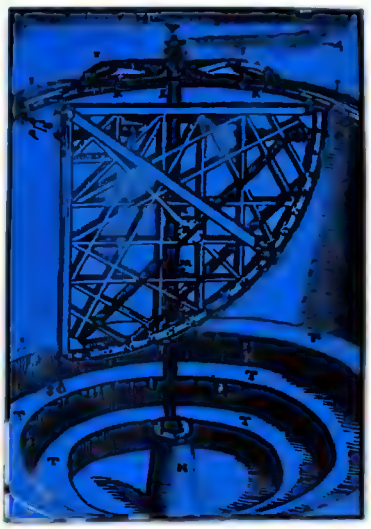
4. FUNCIONES EN ESCALERA-FUNCIONES CONVEXAS

Una función $f: A \to R$ con $A = [a, b] \subset R$ se dirá función en escalera cuando existe un número finito de puntos de $[a, b]$. $a_1 = a < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b$ y un conjunto de valores reales $b_1, b_2 \ldots b_{n-1}$ para los que se tiene

$$x \in (a_i, a_{i+1}) \qquad f(x) = b_i \qquad i = 1, 2, 3 \ldots (n-1)$$

Una función $f: A \to R$ con $A = [a, b] \subset R$ es una función convexa si para cualquier subintervalo $[a_1, a_2]$ de $[a, b]$, el segmento en R^2 de extremos $(a_1, f(a_1))$ y $(a_2, f(a_2))$ está incluido en el conjunto de puntos (x, y) de R^2 definido por $y \geq f(x)$ esto es

$$\forall 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad f(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2) \leq \lambda f(a_1) + (1-\lambda) f(a_2)$$



viene de la página anterior

Tycho fue presentado al rey Federico II de Dinamarca como un joven gentilhombre con brillante reputación de astrónomo y éste financió sus investigaciones con dinero de la corona. Brahe se traslada a Augsburgo y Nuremberg donde se encontraban los mejores artesanos y dirige la construcción de grandes instrumentos. Algunos, como el sestante que reproducimos, eran invención suya, y otros como el armilar ecuatorial y el cuadrante del azimut, eran versiones aumentadas y mejoradas de ingenios en uso desde hacía siglos.

Estos aparatos, construidos bajo su dirección meticulosa, establecieron nuevos niveles de precisión en la investigación astronómica.

LO QUE SUCEDE CUANDO SE ALCANZA LA VELOCIDAD DEL SONIDO

En vuelo, todo aeroplano desplaza el aire a través del que pasa y produce una infinidad de pequeñas perturbaciones. Estas, denominadas ondas de presión, se irradian por los diferentes puntos de la superficie del avión como las olas producidas por una embarcación. Todas se propagan a la velocidad del sonido.

A velocidades inferiores a la del sonido, estas ondas tienen posibilidad de moverse sin dificultad ante el aparato. A la velocidad del sonido, las ondas no pueden ya hacerlo y se condensan, reforzándose entre ellas de forma que crean una onda de choque de alta presión.

Las primeras ondas de choque se forman siempre sobre las alas, donde el flujo del aire es acelerado por la curva del ala; en efecto, algunas partes del ala alcanzan la velocidad del sonido antes que el resto del aparato. Estas ondas de choque pueden alterar la eficiencia de las superficies de control, pero sobre todo, pueden aumentar notablemente la resistencia aerodinámica.

Es difícil poder contemplar las ondas de choque de un aeroplano en vuelo, pero pueden hacerse visibles de una manera sensacional en una galería de viento, mediante una técnica fotográfica especial, el proceso schlieren, que muestra con colores las variaciones de la presión del aire.

5. OPERACIONES CON FUNCIONES

Si dos funciones numéricas definidas sobre un mismo conjunto A entonces podemos sumarlas y multiplicarlas

$$\text{Sean } f: A \to R \qquad g: A \to R$$

Se llama función suma de ambas a la función

$$h: A \to R \qquad \text{tal que:}$$

$$\forall x \in A \qquad h(x) = f(x) + g(x)$$

Esta suma es asociativa.

El conjunto de funciones numéricas definidas sobre un conjunto A forman un grupo aditivo abeliano, la función nula es la función que a cada elemento de A hace corresponder el cero de R; la función opuesta (—f) es la función definida por:

$$(-f)(x) = -f(x)$$

En cuanto al producto de funciones definidas sobre el mismo conjunto A:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

la nueva función es una función numérica definida sobre el mismo conjunto A. El producto es asociativo.

Existe elemento unidad respecto del producto, precisamente la función que a cada elemento $x \in A$ le hace corresponder el elemento 1 de R.

El producto de funciones numéricas no tiene nada que ver con la composición de funciones que se define en Algebra

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \qquad A \xrightarrow{f \cdot g} C$$

$$\text{con } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo:

$$R \xrightarrow{f} R: f(x) = x^2 \qquad R \xrightarrow{g} R;\ g(x) = x^3$$

$$f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) = x^5 = g(x) \cdot f(x)$$

$$(f \circ g)(x) = (x^3)^2 = x^6 = (g \circ f)(x) = (x^2)^3$$

Teniendo en cuenta que las funciones ya constituyen un grupo aditivo abeliano y cumpliéndose la propiedad distributiva $f(g + h) = f.g + f.h$ dicho conjunto de funciones de A en R forma un anillo con elemento identidad. Dicho anillo tiene divisores de cero.

≪Un anillo tiene divisores de cero si $q \cdot p = 0$ con $p \neq 0$, $q \neq 0$.≫

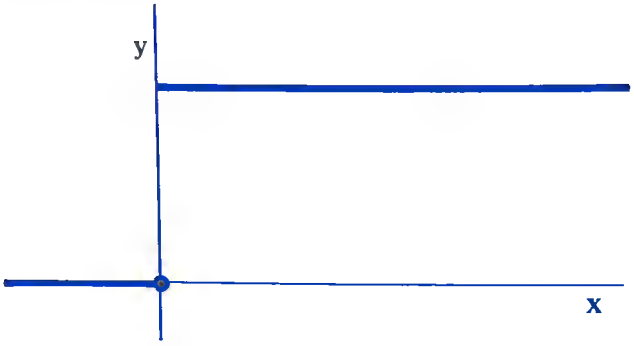
Ejemplos.

Consideremos las funciones:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = 1 & x > 0 \\ f(x) = 0 & x \leq 0 \end{array}\right\}$$

Esta función que no es nula

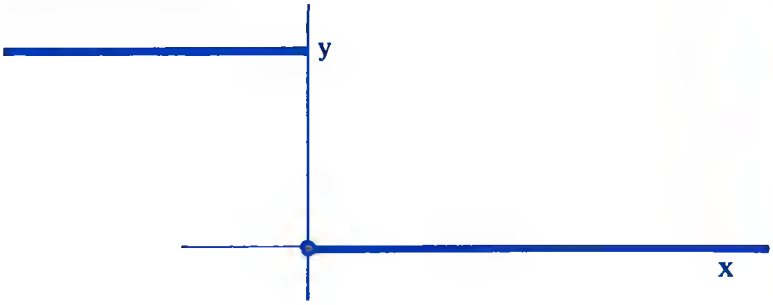
tiene por gráfico



La función

$$\begin{array}{ll} g(x) = 0 & x \geq 0 \\ g(x) = 1 & x < 0 \end{array}$$

tendrá por gráfica



Evidentemente $f(x) \cdot g(x) =$ función nula y ninguna de las dos es la función nula.

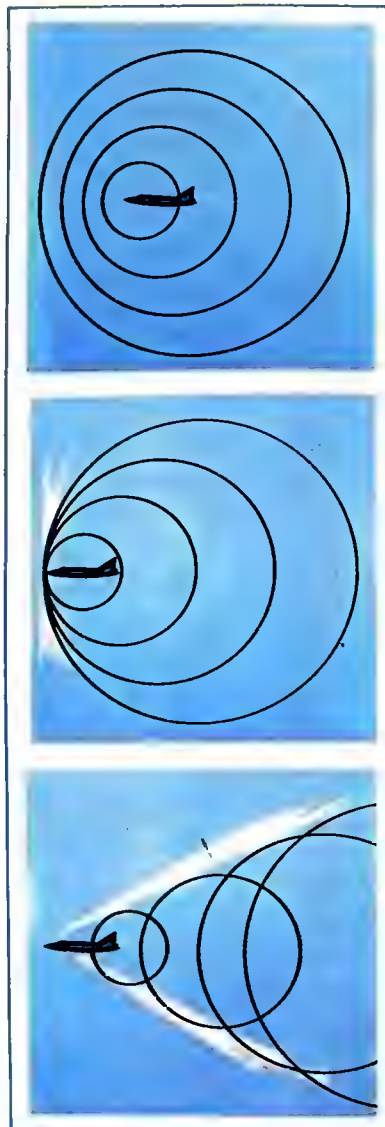
Podemos definir una función f de A en R tal que $0 \in f(A)$ entonces podemos considerar la función

$$\frac{1}{f}: A \to R \qquad \forall x \in A, \qquad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

En el conjunto de funciones de A en R, se puede definir una multiplicación escalar con elementos de R:

$$f: A \to R \qquad \forall K \in R \qquad (Kf)(x) = Kf(x)$$

esta multiplicación escalar y la suma de funciones le da configuración de espacio vectorial sobre R, como además es un anillo hablaremos de «Algebra de funciones numéricas definidas en A»



MACH

Estos diagramas muestran una única onda de presión emitida por el aeroplano. A velocidad subsónica, las ondas se propagan, delante y detrás del aparato, que no puede alcanzar las que tiene delante. Alcanzada le velocidad del sonido, las ondas no pueden propagarse hacia adelante, ya que su punto de origen se mueve con las mismas: se condensan y forman una onda de choque perpendicular a la linea de vuelo. Cuando supera la velocidad del sonido, el aeroplano deja a sus espaldas las ondas de presión y las ondas de choque se pliegen hacie atrás. Fue Ernst Mach quién estableció que los frentes sucesivos de la onda forman un cono.

FERMAT (Pierre de)

GRAN matemático francés nacido en Beumont de Lomague en 1601 y falleció en Castres en 1665. Pascal no siempre pudo seguirle en sus descubrimientos e investigaciones, le llamaba (a Fermat) «el primer hombre del mundo». Un verdadero sabio despistado, hasta tal punto, que sus demostraciones, descubrimientos e investigaciones, se perdían por no hacer anotaciones. Reconocido por D'Alambert, Laplace, Lagrange el honor de haber tenido la primera idea del cálculo diferencial. Fue el primero que realizó la representación de curvas por medio de dos ecuaciones, incluso antes de la publicación de la geometría de Descartes. Juntamente con Pascal, le cabe el honor de haber descubierto el cálculo de probabilidades. Su hijo, hizo la recopilación de su obra en «Varia Opera Mathemática»; en ellos se encuentran teoremas y enunciados que en la actualidad son conocidos y estudiados estando en vigor.

Teorema de Fermat: «La expresión $A^{p-1} - 1$, en la que P es número primo que no divide a A, es divisible por p. Este quizá sea, uno de los más importantes teoremes de los números.

Ultimo teorema de Fermat: si n es un número entero y positivo mayor que 2, la ecuación $X^n + Y^n = Z^n$ no puede tener ninguna solución entera y positiva de los valores de x, y, z. Este teorema, cuya demostración Fermat declaró haber encontrado, (por no tomar nada de sus estudios) ha quedado ignorada.

6.–LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Sea x_0 un punto de acumulación del conjunto A (obsérvese que a $\notin$ A). Diremos que la función f tiene en el punto x_0 límite $L \in R$ y escribiremos:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ si}$$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; / \; \forall \; x \in A$ tal que

$0 < |x - a| < \delta$ se tiene $0 < |f(x) - L| < \epsilon$

Límites infinitos

Diremos que la función f(x) tiene por límite $+\infty$ en x_0 punto de acumulación de A, si $\forall$ k, real y positivo, tal grande como queramos se puede determinar un número $\delta > 0$, de modo que se cumpla que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x)| > k$. Y escribiremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Diremos que la función f(x) tiene por límite $-\infty$ en el punto x_0 de acumulación de A si $\forall$ k real > 0, $\exists \; \delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) < -K$ y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Límites en el infinito

Un subconjunto A de R tal que $A \cap R^+$ no está acotado tiene como punto de acumulación $\infty \in R$, análogamente si $A \cap R$, no está acotado, $-\infty \in R$ es un punto de acumulación de A. Se puede hablar de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Diremos que $L \in R$ es el límite de f(x) cuando $x \to \infty$ si $\epsilon > 0$, $K > 0$ $x > K$ $|f(x) - L| < \epsilon$.

Asimismo puede existir un límite infinito cuando x tiende a infinito ($+\infty$ ó $-\infty$)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Diremos que $+\infty$ es el límite de f(x) cuando $x \to +\infty$ si para todo $K' > 0$ existe un $K > 0$ tal que $x > K \Rightarrow f(x) > k'$

Igualmente podemos definir los tres casos restantes.

Todos los casos apuntados se pueden condensar en una sola definición:

$L \in \overline{R}$ es el límite de la función f(x) en $x_0 \in R$, punto de acumulación del subconjunto $A \subset R$ donde está definida f(x), si para todo entorno E de L, podemos encontrar un entorno reducido H de x_0 tal que

$$x \in H \Rightarrow f(x) \in E$$

NOTA: La f(x) puede no estar definida en x_0 y sin embargo existir L.

Pasamos a continuación a establecer la condición de Cauchy para la existencia del límite de f(x) en x_0.

Para que f(x) tenga límite finito en el punto x_0, es necesario y suficiente que cualquiera que sea el número real positivo $\epsilon > 0$, exista otro número real positivo δ, tal que para todo par de puntos x', x'', verificando las condiciones.

$$|x' - x_0| \leq \delta, |x'' - x_0| \leq \delta, x' \in A, x'' \in A, x' \neq x_0, x'' \neq x_0$$

$$\text{tenga} |f(x') - f(x'')| \leq \epsilon$$

o lo que es lo mismo que para todo $\epsilon > 0$ se pueda encontrar un entorno reducido de x_0 E tal que para

$$\forall x', x'' \in E \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

$$\text{Esto significa que } L = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Demostremos en primer lugar que la condición es necesaria.

es decir estamos suponiendo que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Fijado arbitrariamente el número $\epsilon > 0$, consideremos el $\epsilon/2$ y para este número en virtud de la hipótesis existirá otro $\delta > 0$, tal que $|x - x_0| \leq \delta$, $x \in A$, $x \neq h$ implica: $|f(x) - L|$ L $\epsilon/2$ Si x', x'' son dos puntos cualesquiera de A, que verifiquen las anteriores condiciones, podremos escribir:

$$|f(x') - L| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x'') - L| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Las matemáticas babilónicas tienen un marcado carácter algebraico, a diferencia de los griegos que eran ante todo geómetras.

Los textos referidos a matemáticas que han sido halladas presentan características comunes que apuntan a considerar que se trata de obras didácticas.

En éstas se plantean una serie de problemas del mismo tipo de forma consecutiva y a veces incluso se separan las de diferentes temas por dos líneas.

Aunque el contenido del enunciado del problema haga referencia a cualquier aspecto geométrico tales cuestiones son consideradas sólo como números o incógnitas con las que hay que trabajar.

En estos problemas didácticos no aparecen números irracionales, es como si hubieran escogido los números para obtener resultados concretos, y tampoco aparecen los números negativos que son ignorados o rechazados. En los problemas, se han encontrado problemas con soluciones irracionales que se obtuvieron por aproximación por el método de Herón.

También se ha observado que no se exponían los métodos de reducción de los problemas sino directamente, su resultado.

Los oficios que abarca en general la costura pueden ser: modistería, confección y alta costura.

La modistería abarca desde las modistas que trabajan solas a las que tienen pequeños talleres con oficialas y aprendizas. Los modelos realizados aunque no son exclusivos se cortan según las medidas de los clientes y se hacen varias pruebas.

La confección agrupa a empresas que confeccionan en serie, un mismo modelo en varias tallas. Este sistema es el más extendido debido al creciente perfeccionamiento de las prendas y por otro lado al hecho de que al ser una producción en serie permite unos precios asequibles y disponer rápidamente de las prendas.

La alta costura aparece en 1845 cuando Frederic Worth tuvo la idea de crear cada temporada una colección de modelos y presentarlos sobre maniquíes a su clientela.

La alta costura es la que va imponiendo las variaciones e innovaciones de la moda. La evolución de los modelos depende de algunos grendes modistas, sobre todo de París e Italia que son los países donde habitualmente se presentan las grandes colecciones.

luego:

$$\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|f(x') - f(x'') - L + L\right| \leq \left|f(x') - L\right| + \left|L - f(x'')\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

queda por tanto demostrada que la condición es necesaria.

Demostremos que la condición es suficiente. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales que convergen hacia x_0... se tiene, naturalmente que $x_i \in A$, para $\forall j$). Entonces fijado arbitrariamente el número real $\delta > 0$ existirá un N, tal que si $m \geq N$, $n \geq N |x_m - x_0| \leq \delta, |x_n - x_0| \leq \delta$. Si en particular este δ es el que corresponde de acuerdo con la hipótesis a un $\epsilon > 0$ arbitrariamente fijado de antemano se tendrá $m \geq N$, $n \geq N$ implica: $|f(x_m) - f(x_n)| \leq \epsilon$, lo cual prueba que $\{f(x_n)\}$ es sucesión de Cauchy. Llamemos L al límite de $\{f(x_n)\}$. Si en lugar de partir de la sucesión $\{x_n\}$ convergente hacia x_0, encontramos análogamente que la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene límite. A dicho límite le llamamos L'.

La sucesión $x_1, x_1', x_2, x'_2, \ldots x_n, x_n', \ldots$ que evidentemente converge hacia x_0, da origen a: $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2') \ldots f(x_n), f(x_n')$ sería también convergente según lo que hemos demostrado y para ello es necesario que $L = L'$. Luego cualquiera que sea la sucesión $\{x_n\}$ convergente a x_0, el límite de $f(x_n)$ es fijo. Esto implica por el teorema demostrado anteriormente que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y queda demostrado por tanto que la condición es suficiente.

TEOREMA:

Sea f una función real definida en A, sea x_0 un punto de acumulación de A. Para que f tenga por límite L en el punto x_0, es necesario y suficiente que cualquiera que sea la sucesión x_n de puntos de A, distintos de x_0 pero que converge hacia x_0, la sucesión de números reales $\{f(x_n)\}$ tenga límite L. y esos límites coinciden

La condición es necesaria. Suponemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y que $\{x_n\} \subset A$. Fijado $\epsilon > 0$ por ser $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ existe $\delta > 0$ tal que para

$$|x - x_0| \leq \delta, x \in A, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Para cada δ, por ser $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ existe un número natural N tal que $n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| \leq \delta$ y $x_n \in A$ $x_n \neq x_0$ luego $\forall \epsilon > 0$ le hacemos corresponder un natural N, tal que $n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - L| \leq \epsilon$ que es lo que tratabamos de demostrar.

— La condición es suficiente; Debe cumplirse que si:

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, implica que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Supongamos que L no sea el límite de la función en el punto x_0; esto implicaría que existe $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $x \in A, x \neq x_0$ verificando $|x - x_0| < \delta$ y para el cual $|f(x) - L.| < \epsilon$

Dando a δ sucesivamente los valores de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ obtendríamos una sucesión de puntos de A $\{x_n\}$, distintos de x_0, verificando $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ y para los cuales se tendría $|f(x_n) - L| > \epsilon$

La sucesión $\{x_n\}$ converge evidentemente hacia x_0, y sin embargo la $\{f(x_n)\}$ no puede tener límite L, lo cual es contrario a la hipótesis.

Desmenucemos la demostración: Decimos que para

$$\delta = \frac{1}{2}, \ \exists\, x, \text{ tal que } |x - x_0| < \frac{1}{2}$$

este es el x_2 de la sucesión $\{x_n\}$ que vamos a construir. (El x_1, lo obtenemos para $\delta = 1$).

$$\delta = \frac{1}{3} \ \exists\, x \text{ tal que } |x - x_0| < \frac{1}{3}$$

este es el x_3, etc., evidentemente la sucesión que vamos construyendo de esta forma tiene como límite x_0. Luego evidentemente
$\lim_{n \to \infty} \{f(x_n)\} \neq L$ lo que va en contra de la hipótesis.

Si f(x), g(x) y h(x) son funciones reales definidas en un conjunto $A \subset R$, x_0 es un punto de acumulación de A y para valores distintos de x_0 tales que $|x - x_0| < \delta$ la función h(x) está comprendida entre f(x) y g(x) es decir

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)|$$

Se cumple que si f(x) y g(x) tienen el mismo límite L en $x = x_0$ existe el límite de h(x) cuando $x \to x_0$
y su valor es L o sea,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

La demostración se deja para el lector ya que es igual a la realizada en sucesiones.

Límite de una función compuesta

Si f(x) es una función real de variable real de $A \subset R$ en R y g(y) es una función real de variable real de $B \subset R$ en R con

$f(A) \subset B$ y existe: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ $\lim_{y \to y_0} g(y) = L_2$

siendo $y_0 = f(x)$ entonces existe $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$
y coincide con $\lim_{y \to y_0} g(y) = L_2$

La cinta de Möbius es una superficie de una sola cara, pues si la recorremos volvemos al punto de partida después de haber pasado por todas las puntas que la forman.

Esta superficie fue estudiada por August Ferdinand Möbing astrónomo y matemático en la ciudad alemana de Leizpig.

Su construcción es sencilla, si tomamos una tira de papel y unimos los extremos después de girar uno de ellos media vuelta. Es decir si los extremos son A y B y C y D hemos de hacer coincidir A con D y B con C.

Si tenemos un lapiz y dibujas una línea partiendo de un punto cualquiera y recorres la cinta verás como alcanzas el mismo punto de origen y el trazo del lapiz recorre toda la figura.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Si además la cortas por su línea media, es decir por donde trazaste la línea anterior, obtendrás un anillo de doble longitud y tensión. Si repites esta operación obtienes dos anillos dos vaces anudados entre sí y con doble tensión.

Si en lugar de una cinta estrecha utilizas una del tamaño de un folio y antes de pegar sus extremos la colocas en una máquina de escribir podrás escribir dos caras sin sacar al papel de la máquina. Si eres un poco ingenioso y te gusta invantar misterios puedes fabricarte tu propio "cuento de nunca acabar".

Demostración

Al ser L_2 el $\lim_{y \to y_o} g(y)$ tendremos que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|y - y_o| < \delta \Rightarrow |g(y) - L_2| < \epsilon$$

y al ser L_1 el $\lim_{x \to x_o} f(x)$ tendremos que a partir del δ anterior podré encontrar un $\beta > 0$ tal que $|x - x_o| < \beta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$

luego $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \beta \,/\, |x - x_o| < \beta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - L_2| < \epsilon$

$$\text{o sea } \lim_{x \to x_o} [(g \circ f)(x)] = L_2$$

7. LIMITES LATERALES

Observemos que la indicación $x \to x_0$ decimos que x se aproxima al valor x_0, pero puede tomar valores mayores o menores que x_0, es decir puede acercarse a x_0 por la izquierda o por la derecha. Esto nos lleva a los conceptos de límites laterales de una función en un punto.

Se dice que L es el límite por la derecha de la función f(x) en el punto x_0, cuando para cada número real $\epsilon > 0$ existe otro $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - x_o < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\text{y} \quad L = \lim_{x \to x_o^+} f(x)$$

Definimos el límite a la izquierda:

si $\forall\, \epsilon > 0, \ \exists\, \delta$ tal que $0 < x_o - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$$L = \lim_{x \to x_o^-} f(x) \qquad \text{límite a la izquierda.}$$

La condición necesaria y suficiente para la existencia de límite en un punto x_o es que existan y sean iguales los límites laterales.

La condición es necesaria.

Vamos a demostrar que si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Límite por la derecha.

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \exists\, \delta_1 \,/\, 0 < x - x_o < \delta_1 \ \ x \in A, x > x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Límite por la izquierda

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta_2, / \; 0 < x_0 - x < \delta_2 \quad x \in A$$
$$x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ entonces resulta:

$\forall \epsilon > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Luego resulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Igualmente podemos demostrar la condición suficiente que se deja como ejercicio.

8.—UNICIDAD DEL LIMITE.

Vamos a demostrar a continuación, la unicidad del límite.

Si suponemos una función f(x) con dos límites distintos en el mismo punto x_0: L y L'.

Fijado $\epsilon > 0$, existirán dos números reales δ_1 y δ_2 tales que:

$$|x - x_0| < \delta_1, x \in A, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$
$$|x - x_0| < \delta_2, \; x \in A \; x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L'| < \epsilon$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, se ve que para los puntos x tales que $|x - x_0| \leq \delta$ y $x \neq x_0$ se verifican simultáneamente las dos implicaciones y como tenemos:

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\epsilon$$

De aquí se deduce que $L = L' = 0$ o sea $L = L'$.

ya que la desigualdad $|L - L'| < 2\epsilon$ se cumple $\forall \epsilon > 0$ y se puede escribir $-2\epsilon < L - L' < 2\epsilon$

La única forma de conciliar esto es que $|L - L'| = 0$

con lo que queda demostrada la unicidad del límite.

FLOTACION E INMERSION

La emersión y la inmersión de un submarino se deben a variaciones de dos fuerzas que actúan en sentido contrario: el empuje de flotamiento (flecha azul) ejercido por el agua y la fuerza de gravedad (flecha gris) representada por el peso del barco. Cuando los compartimentos de lastre del submarino son inundados, la fuerza de gravedad supera el empuje de flotamiento y se produce la inmersión. Apenas una parte de lastre se expulsa de los compartimientos el submarino alcanza una flotación neutra y permanece en equilibrio. Con los depósitos de lastre completamente vacíos el empuje de flotamiento es superior a la fuerza de gravedad y el submarino regresa a la superficie.

Al peso del cuerpo sumergido en agua se opone un empuje vertical dirigido hacia arriba cuya fuerza es tanto más grande cuanto mayor es el volumen del cuerpo. Así para conseguir que un submarino ascienda o descienda es preciso modificar su volumen. Esto se consigue con un sistema de lastre que son compartimentos en comunicación con el mar. Si se deja entrar el agua en ellos, el volumen del submarino disminuye y desciende. Si expulsamos el agua, el volumen interior aumenta y el buque asciende.

Los primeros submarinos aparecieron en el siglo XIX y eran movidos a mano mediante manivelas. Después la máquina de vapor superó el problema manual pero sólo permitía inmersiones de corta duración. El motor eléctrico superó este inconveniente pero se necesitaban grandes baterías de acumuladores.

En la actualidad los submarinos se mueven con energía nuclear que da al submarino una autonomía casi ilimitada.

A grandes profundidades los submarinos son más rápidos que la mayor parte de los buques de superficie y por su capacidad de ocultarse son los portadores de las armas más temibles de la guerra: los misiles intercontinentales.

9.—ALGEBRA DE LIMITES.

1) Límite de la suma de funciones: si f(x), g(x) son dos funciones definidas en A y existen:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = L'$$

$$\text{existen } \lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + L'$$

Tenemos que demostrar que para cualquiera

$\epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que:

$$|(f(x) + g(x)) - (L + L')| < \epsilon, \text{ si } |x - x_0| < \delta$$

$$|(f(x) + g(x)) - (L + L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'|$$

Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ para $\frac{\epsilon}{2}$ existe δ_1, tal que $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$

Análogamente $|g(x) - L'| < \frac{\epsilon}{2}$ si $|x - x_0| < \delta_2$. Tomando δ = mínimo (δ_1, δ_2) podemos concluir

$$|(f(x) + g(x)) - (L + L')| \leq |f(x) - L| +$$

$$+ |g(x) - L'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\text{con } |x - x_0| < \delta$$

luego queda demostrada la propiedad.

2) Producto de funciones. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ } Si existen

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

3) Producto de un número real por una función.

Para todo $\kappa \in R$ $\lim_{x\to x_0} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \lim_{x\to x_0} f(x)$

4) Función simétrica respecto al producto.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ $(L \neq 0)$ entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

Cociente de funciones.

Si $\lim f(x) = L$, $\lim g(x) = L'$ $(L' \neq 0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{L'}$$

Vamos a ver unos apartados que nos van a ser muy útiles para el cálculo de límites.

Como consecuencia de la propiedad del límite del producto de funciones, se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = L^n$$

De igual forma si $f(x) > 0$ para $x \neq x_0$, $x \in A_1$ donde $A_1 \subset A$ es un intervalo con centro x_0 entonces

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{1/n} = L^{1/n}$$ para todo

n natural y en general $n = \frac{p}{q}$ racional

Asímismo $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ con la condición de que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

Otros casos:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in R \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)^{x - x_0}] = 1$ para $f(x) \geq 0$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} b^{f(x)} = b^L$

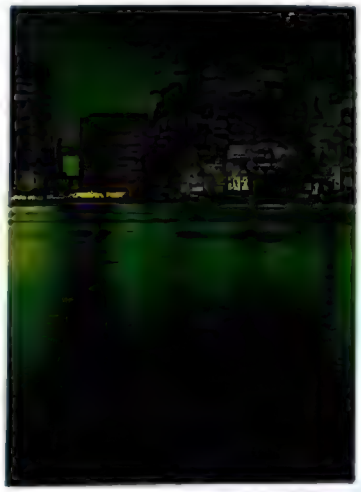
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim\limits_{x \to x_0} L\,[f(x)] = L[L]$

para $f(x) > 0$, en un cierto intervalo, salvo en su caso

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1 > 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2 \in R$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$



La ciudad de Nueva York sufrió un terrible apagón durante la noche del 9 al 10 de noviembre de 1965 debido a una avería en una de las más complicadas instalaciones eléctricas del mundo, la población se llenó de pánico.

El hombre tiene miedo de que falle su desarrollo tecnológico por falta de energía pues incluso fuentes inagotables en teoría como la hidroeléctrica presentan sus limitaciones geográficas y económicas. En otros casos es más evidente como el petróleo, carbón o gases naturales que están en vías de agotamiento o al menos es indudable su limitada duración.

El consumo de energía es creciente, en 1860 el consumo mundial era de 1.100.000 millares de kw/h y en los últimos años se superan los 50 billones de kw/h.

Aparecen entonces otros recursos como alternativa a las clásicas fuentes de energía: la energía solar, mareomotriz, cólica etc. pero aún no han alcanzado el desarrollo técnico necesario para reemplazar las ahora existentes.

Lo que si es evidente es que la mejor fuente de energía es la biológica, el trabajo humano nacional puede suponer una solución al problema energético.

BERNOULLI

NO creemos que exista en la historia matemática una familia más completa que la familia Bernoulli.

Originarios de Holanda y debido a persecuciones religiosas se asentaron en Basilea.

JACQUES I, matemático nacido en Basilea en 1654, falleció en la misma en 1705. Desde muy joven era gran aficionado a las matemáticas y con su hermano Jean resolvió problemas célebres de su tiempo. Publicó la primera integración de una ecuación diferencial. Solucionó los problemas de los isoperimetros, Principios y aplicaciones del cálculo de probabilidades y fue por fin reconocido como el padre del cálculo exponencial. En premio a sus descubrimientos fue nombrado profesor de la Universidad de Basilea en 1687. En 1690 descubrió las propiedades de la «espiral logarítmica».

5) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, con $f(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

10.—INDETERMINACIONES

En el cálculo de límites nos encontramos con expresiones cuyo resultado no es previsible:

1° $(+\infty) + (-\infty)$

2° $(+\infty) - (+\infty)$

3° $(-\infty) - (-\infty)$

4° $(+\infty) \cdot 0$

5° $(-\infty) \cdot 0$

6° $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

7° $\frac{0}{0}$

8° 0^0

9° $(+\infty)^0$

10° $1^{+\infty}$

11° $1^{-\infty}$

Al hallar el límite de la suma de funciones aparecen los casos de indeterminación 1), 2), y 3) cuando: $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$

si

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = (+\infty) + (-\infty)$$

si $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to \infty} g(x) = (+\infty) + (-\infty)$$

si $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to \infty} g(x) = (-\infty) - (-\infty)$$

En el producto aparecen el caso 4) y 5) Cuando:

si $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \infty} g(x) = (+\infty) \cdot 0$$

si

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = (-\infty) \cdot 0$$

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$

Para el cociente: aparecen los casos 6) y 7)

si

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty\end{array}\right\} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

si

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0\end{array}\right\} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{0}{0}$$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

En la función potencial-exponencial aparecen los siguientes casos de indeterminación 8), 9), 10) y 11).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0\end{array}\right\} (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = 0^0$$

si

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0\end{array}\right\} (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = (+\infty)^0$$

Para

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty\end{array}\right\} (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = 1^{\pm\infty}$$

La resolución de los distintos casos de indeterminaciones se verán en problemas.

NOTA: Ver también las igualdades simbólicas que aparecen en el capítulo 34, y que son de aplicación aquí.

EINSTEINS, ALBERT

Nació en Ulm en 1879 y murión en Princenton en 1955.

Este eminente físico de origen alemán, pasó su infancia en Munich, donde su padre dirigía una empresa de electricidad. Allí hizo sus primeros estudios físicos y matemáticos, posteriormente fué matriculado en el Instituto politécnico de Zurich donde terminó sus estudios con no muy buenas notas. Desanimado para continuar los estudios ganó una plaza en la oficina de patentes de Berna, tomó la nacionalidad suiza y contrajo matrimonio.

Fue, entonces, cuando se le despertó la mente para el estudio de grandes problemas, que planteaba la Física contemporánea. El efecto fotoeléctrico y la *Teoría de la relatividad*. Confirmando, plenamente la teoría atómica partiendo de la tesis fundamental de la existencia del átomo.

En la *teoría de la relatividad* acomete la explicación de fenómenos inexplicables, hasta llegar a la fórmula que tanta trascendencia iba a tener en el futuro:

$$E = mc^2.$$

continúa en la página siguiante

viene de la página anterior

Todas sus teorías tiraban por los suelos los postulados de la Física contemporánea. Sus métodos revolucionarios no tuvieron inmediatamente aceptación, aunque le abrieron las puertas de la carrera universitaria.

En 1912 es nombrado profesor de la Escuela politécnica superior federal de Zurich. En 1913, fue profesor del Instituto Kaiser-Wilhelm de Berlín, ingresando en la Academia de ciencias de Prusia.

Durante la primera guerra mundial, al tener la nacionalidad suiza, adoptó una actitud neutral.

En 1921 recibió el premio Nobel de Física por la ley fotoeléctrica y por los trabajos de la Física Teórica.

Con motivo de las persecuciones antisemitas se vio obligado a salir de Berlín en 1933; marchó a París donde fué profesor del Colegio de Francia, Bélgica, Gran Bretaña. De allí pasó a EE.UU. donde fué nombrado director del Instituto de estudios superiores de Prince ton adoptando en 1940 la necionalidad norteamericana.

Su *"teoría de la relatividad del tiampo y dal aspacio"* le han dado a conocer como el gran sabio de la época contemporánea.

continúa en la página siguiante

11.— INFINITESIMO. NOTACIONES Y PROPIEDADES

A partir de la definición de límite de una función real podemos construir una nueva función φ de modo que si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ esta nueva función que construimos es:

$$\varphi(x) = f(x) - L$$

Evidentemente $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$

A este tipo de funciones tales que tienden a 0, o al tender $x \to \infty$ se les llama infinitésimos. Observemos que no se puede hablar de infinitésimo de una manera absoluta así: $\frac{1}{x}$ es un infinitésimo si $x \to 0$ pero no lo es si $x \to 2$. En un punto podemos sustituir una función por la suma del límite de la función en un punto, más un infinitésimo.

Vamos a empezar viendo la notación O y o que se conocen como notaciones de BACHMAN.

La expresión $f(x) = O(g(x))$ para $x \in X$, denota que existe una constante K real > 0 y un intervalo $X \subset A$ tal que

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|$$

análogamente se escribe

$f(x) = 0\,(g(x))$ si, en particular, existe y es finito el límite:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ se verifica la relación anterior.

Si existe y es finito el límite de:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^p} = K \neq 0$$

$p > 0$, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de orden p respecto del infinitésimo x.

De igual forma si $\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0\ (p > 0)$

se dice que $\varphi(x)$ es un infinito de orden p, respecto del infinito x.

Si para todo $\epsilon > 0$, existe un intervalo X con centro en x_0, tal que para $\forall x, x_0 \neq x \in X_\epsilon$, $|f(x)| \leq \epsilon\, g(x)$ escribiremos $f = o(g)$

En este caso, si existe

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ dicho límite tiene que ser cero.

«Diremos que f y g son equivalentes en x_0, y escribiremos $f \approx g$, cuando $f = 0(g)$, $g = 0(f)$.

Desde luego si el límite existe. debe ser igual a 1. Pero puede no existir dicho límite.

Asi mismo si $f \approx g \quad f - g = o(f) = o(g)$

Las funciones equivalentes en un punto tienen una importancia capital en el cálculo de límites pues pueden sustituirse unos por otros. Así por ejemplo, si tenemos en cuenta que

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = e$$

Resulta que $L(1 + x) \approx x$ para $x = 0$

En efecto: $$\lim_{x \to 0} \frac{L(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} L(1 + x)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = L\, e = 1$$

De igual forma: $a^x - 1 \approx x\, L\, a$, $x \to 0$

hagamos $y = a^x - 1$; $x = \dfrac{L(1+y)}{La}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{xLa} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{L(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1$$

La suma de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo cuando $x \to x_0$.

y si los infinitésimos son del mismo orden p será un infinitesimo de orden $\geq p$. El orden de un infinitésimo no varía al sumarle o restarle otro de orden superior.

También el producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.

y si es un número n de infinitésimos y tienen ordenes $p_1, p_2, \ldots p_n$ será un infinitésimo de orden $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

— El producto de un infinitésimo por una constante cualquiera o por una variable acotada es un infinitésimo.

viene de la página anterior

Dicha teoría tiene tres partes:

1º Relatividad restringida, que trastoca las leyes de la mecánica de Newton, introduciendo la equivalencia de masa y energía.

2º La relatividad generalizada, o teoría de la gravitación universal.

3º El estudio de la gravitación y electromagnetismo.

Estas teorías han sido brillantemente confirmadas en el estudio del átomo y de la Astronomía, en lo que respecta a velocidades y masas considerables.

Aun hoy día, las teorías de Einstein, son combatidas más por índole personal, que por motivo científico, o tanto por grupos antisemitas y belicistas que no le perdonan nunca su *pacifismo activo*.

Sin embargo fue un pacifista convencido, enemigo de la injusticia, acudiendo siempre en ayuda de los oprimidos.

Falleció sin ver colmado su último proyecto: EL CONTROL INTERNACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA.

En el reino de Castilla, en tiempos de Alfonso X, se organizaron los embajadores, correos y mandaderos a quienes se consideraban como empleados reales.

En la Corona de Aragón se establecieron en tiempos de Jaime I. En tiempos de los Reyes Católicos se estableció el cargo de correo mayor como responsable ante el rey, así como tres correos mayores en Sevilla, Madrid y Granada.

En el reinado de los Austrias el correo se convirtió en un monopolio de la familia de los Tassis que organizaron el correo y las comunicaciones. En 1525 se nombró un correo mayor de las Indias vinculándolo a la familia Galindez de Carvajal. En 1610 se estableció entre Madrid y Barcelona el servicio de estafeta que consistía en remitir la correspondencia con correos que se iban relevando en las diversas paradas de posta.

En 1706 Felipe V nombró un administrador general de postas y correos del reino y comenzó la organización del correo como un servicio oficial.

A partir del siglo XVIII se creo el servicio de carteros y el marcaje de las cartas con el sello de la administración de salida y la fecha de salida. En el siglo XIX aumentaron los envíos entre Madrid y las provincias. En 1845 se estableció el franqueo según el peso y a partir de 1850 se estableció el sello postal adhesivo con carácter obligatorio.

Incluimos a continuación una lista de infinitésimos equivalentes:

$$\text{sen } x \simeq x \text{ para } x = 0$$

$$1 - \cos x \simeq \frac{x^2}{2} \text{ para } x = 0$$

$$\text{tag } x \simeq x \text{ para } x = 0$$

$$\text{arc sen}x \simeq x \text{ para } x = 0$$

$$\text{arc tag}x \simeq x \text{ para } x = 0$$

$$a^x - 1 \simeq x \text{ . La para } x = 0$$

$$e^x - 1 \simeq x \text{ para } x = 0$$

$$\log(1 + x) \simeq x \text{ para } x = 0$$

$$(1 + x)^\alpha - 1 \simeq \alpha x \text{ para } x = 0$$

$$* \begin{cases} p(x) \simeq a_p x^p \text{ para } x = 0 \\ p(x) \simeq a_n x^n \text{ para } x \neq \infty \end{cases}$$

*donde $p(x) = a_p x^p + a_{p+1} \cdot x^{p+1} + \ldots + a_n x^n$, $p < n$ $a_p \neq 0$ $a_n \neq 0$

La tabla que acabamos de exponer no es ni muchísimo menos exhaustiva.

Muchas otras equivalencias de funciones pueden obtenerse mediante un cambio de variable

* * *

— Si el cociente de dos infinitésimos $\frac{\alpha'}{\alpha}$ tiene por límite l la diferencia $\alpha' - \alpha$ es de orden superior a ambos.
— Como término de comparación de infinitésimos para $x \to x_0$ se elige $x - x_0$ el cual se llama infinitésimo principal.

INFINITOS

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

se llama variable dependiente o función infinita o simplemente infinito

El cálculo con infinitos es análogo al de los infinitésimos y las proposiciones también, por lo cual lo omitimos aquí.

12.—FUNCIONES CONTINUAS

12.1.—Definiciones

Continuidad en un punto.

Sea $f(x)$ una función definida en $A = [a, b]$ siendo A un intervalo cerrado de R. La función $f(x)$ es continua en $x_0 \in A$ si $\forall \epsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

es decir a todo intervalo abierto con centro $f(x_0) \in H_\epsilon$ se le puede hacer corresponder un intervalo abierto con centro en $x_0 \in E_\delta(x_0)$ tal que:

$$(x \in E_\delta(x_0)) \Rightarrow f(x) \in H_\epsilon$$

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en él.

La definición de continuidad de una función numérica en un punto $x \in A$ del intervalo en que está definida es equivalente a la siguiente:

Una función definida en un intervalo $A \subset R$ es continua en un punto $x_0 \in A$, si y sólo si, existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y coincide con el valor de $f(x_0)$

La consideración de los límites laterales en una función permite establecer otras definiciones:

Continuidad a la derecha: una función $f: A \to R$ es continua a la derecha de un punto x_0 del intervalo A de definición cuando existe

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ y dicho límite} = f(x_0)$$

Continuidad a la izquierda: una función f es continua a la izquierda en un punto $x_0 \in A$ cuando existe $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y dicho límite vale $f(x_0)$

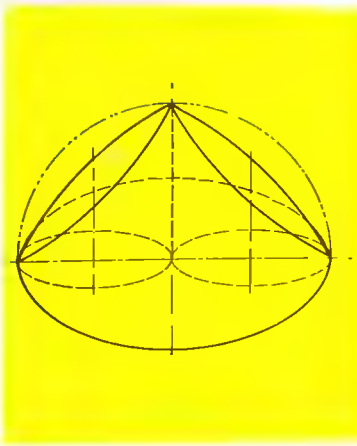
Una condición necesaria y suficiente para que una función sea continua en un punto es que sea simultáneamente continua en dicho punto, por la derecha y por la izquierda.

Veamos un ejemplo.

Sea $f: [0, 1] \to R$ definido por:

$$f(x) = x \text{ para } x \in [0, \frac{1}{2})$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \text{ para } x \in [\frac{1}{2}, 1]$$



«EL ENIGMA FLORENTINO»

Vicenzo Viviani era un ilustre geómetra italiano, próximo a Galileo que desarrolló una importante tarea de recuperación de los grandes matemáticos: Euclides, Arosteo o Apolonio.

Pero Viviani debe gran parte de su personalidad a un problema geométrico que él mismo planteó y resolvió. El enigma florentino consistía en la construcción de una bóveda esférica con dos ventanas que fueran iguales y que dejaran en la bóveda una porción igual al cuadrado construido sobre el diámetro de la esfera. Es lo que se conoce como la bóveda de Viviani y que de manera gráfica podemos imaginar como una semiesfera que es «atravesada» por dos cilindros normales a su plano ecuatorial y cuyo diámetro es igual al radio de la esfera. Actualmente esta bóveda constituye un problema «clásico» de cálculo de volúmenes por integración.

LOS ELEMENTOS

Los Elementos es la obra más importante de orden científico escrita por Euclides en el siglo III a. d. C. y cuya vigencia continuó hasta finales del siglo XIX.

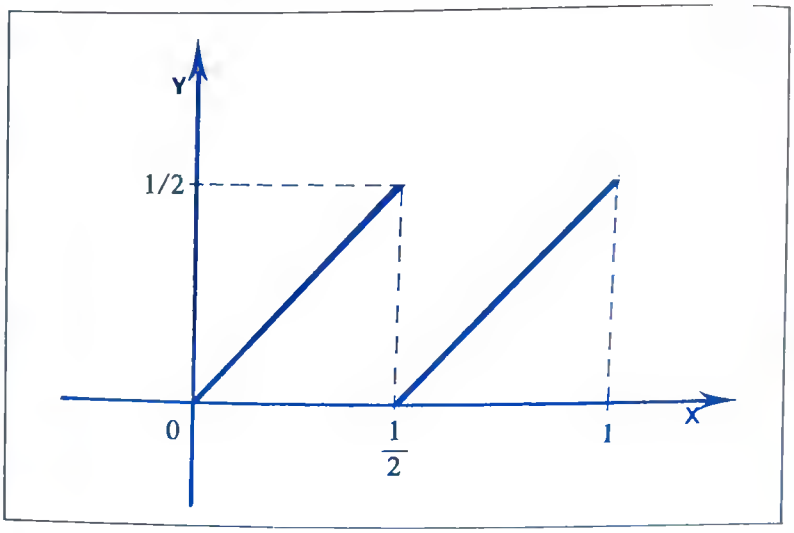
El método empleado por Euclides fue utilizado por otros científicos griegos y es el método generalmente usado en matemáticas. Consiste en admitir una serie de propiedades, para deducir a través de la lógica todas las proposiciones que de ellas puedan derivarse.

En Los Elementos no aparece ningún ejemplo numérico, ni tampoco instrumentos geométricos Euclides sólo resuelve construcciones con rectas y circunferencias. Es importante destacar el lugar que alcanza la geometría a lo largo de toda la obra y en especial los poliedros regulares.

Los Elementos se componen de trece libros, 465 proposiciones; 93 problemas, 372 teoremas. Hay algunas definiciones curiosas asl Euclides define:

continúa en la página siguiente

La gráfica de esta función se indica en la figura



Estudiamos su continuidad para $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

luego la función no es continua en $\frac{1}{2}$

Continuidad en un intervalo

Una función f se define como continua en un conjunto A, cuando es continua en todos los elementos de A.

12.2.—Algebra de funciones continuas

Como consecuencia de las propiedades vistas en los límites tenemos que si f y g son funciones definidas en un conjunto $A \subset R$ y ambas son continuas en $x_0 \in A$, entonces $(f + g)$ es continua en x_0, lo mismo para $\alpha \cdot f$ y $f \cdot g$. Puesto que además $(-f)$ es continua en todos los puntos en que lo sea f, y la función nula es continua en todos sus puntos, tenemos que el conjunto de funciones continuas sobre un intervalo de R constituye, un grupo aditivo abeliano. Por ser $(f \cdot g)$ continua tenemos un anillo y por ser $\alpha \cdot f$ también continua, un espacio vectorial, en consecuencia tenemos un algebra de funciones continuas.

12.3.—Discontinuidades

Decimos que una función f(x) es continua en un punto x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

En definitiva cuando existe el límite y dicho límite coincide con el valor $f(x_0)$.

Tipos de discontinuidad

1. Discontinuidad evitable.

$$\text{Existe } \lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$$

es una discontinuidad evitable. ¿Cómo evitarla? dando a $f(x_0)$ el valor L

2. Discontinuidad de 1ª especie.

Si no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ pero existen los límites laterales

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ que serán distintos.

Se llama salto o valor de la discontinuidad al valor absoluto de la diferencia de los límites o sea:

$$S = \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$$

Las funciones en escalera tienen discontinuidades evitables o de primera especie.

3. Discontinuidad de 2ª especie.

No existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ pero tampoco existe alguno o ninguno de los límites laterales.

12.4.—Propiedades de las funciones continuas

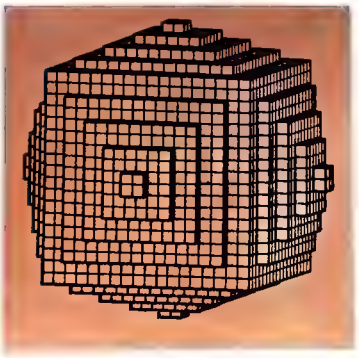
Vamos a enunciar algunas propiedades características de las funciones continuas.

1) Si una función f(x) definida en un intervalo R es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces en algún entorno de x_0, la función mantiene signo constante, el signo de $f(x_0)$ y además existe un valor $r > 0$ tal que en dicho entorno $|f(x)| > r$.

Demostración

En efecto si $f(x_0) \neq 0$

para $\epsilon < \frac{1}{2}|f(x_0)|$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$



viene de la página anterior

Punto es lo que no tiene partes.

Línea recta es la que yace igual respecto a todos los puntos.

Paralelas son aquellas rectas de un plano que prolongadas por ambas partes en ninguna de estas se encuentran.

Como vemos por estas definiciones la geometría Euclidiana siente predilección por lo visual, limitado, infinito, etc.

Los primeros cuatro libros de Los Elementos de probable origen pitagórico comprenden proposiciones de geometría plana elemental, triángulos, paralelogramos, teorema de Pitágoras, circunferencias, etc.

Los dos libros siguientes se refieren a proporcionalidad, semejanzas, aplicaciones, etc.

Los tres libros siguientes son relacionados con la teoría de números, progresiones, divisibilidad, etc.

El libro décimo se ocupa de los irracionales.

Los tres libros restantes se refieren más bien a geometría superior, geometría del espacio, poliedros regulares y su inscripción o circunscripción en la esfera.

Los antiguos editores añadieron a estos trece volúmenes un par de libros más. El libro catorce debido a Hiposides de Alejendría y el libro quince debido a un discípulo de Isidoro de Mileto, ambos tratan de poliedros regulares pero con un nivel científico muy inferior a los verdaderos Elementos escritos por Euclides.

esto es: $f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$.

si $f(x_0) > 0$ para $|x - x_0| < \delta$, $f(x) > f(x_0) - \epsilon > \frac{1}{2} f(x_0) = r$

si $f(x_0) < 0$ $f(x) < \epsilon - |f(x_0)| < -\frac{1}{2}|f(x_0)| < 0$ y además

$|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)|$

Recíprocamente si una función es continua en un punto x_0 y en todo entorno de x_0, toma valores positivos y negativos, entonces $f(x_0) = 0$

Como consecuencia tenemos la siguiente propiedad.

2) Si una función de variable real está definida en un intervalo [a, b], es continua en todo el intervalo y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un punto $C \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$

Demostración

Puesto que f(a) y f(b) tienen distinto signo, tomando el punto medio $\frac{a + b}{2}$, pueden ocurrir dos casos:

1) $f(\frac{a + b}{2}) = 0$, con lo que la propiedad quedaría demostrada

2) $f(\frac{a + b}{2}) \neq 0$ y entonces tiene distinto signo de f(a) ó de f(b). Supongamos que signo $f(a) \neq f(\frac{a + b}{2})$.

Entonces consideraríamos el intervalo de extremos $[a, \frac{a + b}{2}]$ y procederíamos de igual forma

Siguiendo este proceso tenemos una sucesión $I_1, I_2, \ldots$ de intervalos encajados cuyas longitudes respectivas van siendo

$$\frac{d}{2}, \frac{d}{2^2}, \frac{d}{2^3}, \ldots \frac{d}{2^n} \text{ siendo } d = a - b$$

Estos intervalos definen un único punto c, de modo que en cualquier entorno de c hay puntos en los que la función f toma valores de signo contrario, luego por continuidad $f(c) = 0$.

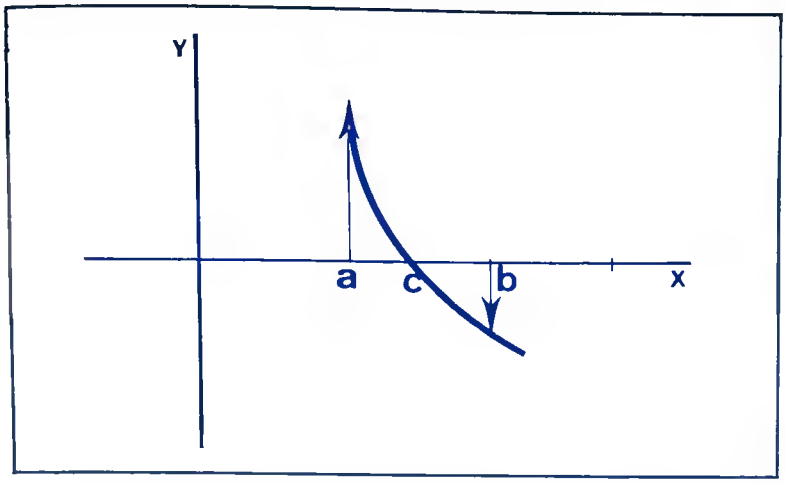
BONAVENTURA CAVALIERI

NACIO en Milán en 1597 y falleció en Bolonia en 1647. Gran matemático italiano, discípulo de Galileo Galilei. Jesuita que, además de enseñar Religión, desde muy joven sintió el deseo de saber Matemáticas. Se doctoró en dicha ciencia en muy temprane edad, hasta tal punto que a los 26 años enseñaba esta materia en la facultad de Ciencias de Bolonia. Fue el primero que introdujo en Italia el Cálculo logarítmico. Se le reconoce como el precursor del actual Análisis infinitesimal.

Muchos son los cálculos y teorías debidos a él; pero de todas ellas, la más importante es la teoría de los «indivisibles», expuesta en su obra «Geometría indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota». En esta teoría estudia las magnitudes geométricas, estando compuestas de un número infinito de elementos o indivisibles, que son los últimos términos que se pueden hacer de la descomposición.

Así pues, tanto las medidas de longitud como las de superficie y de volumen se convierten al efectuar la suma de una infinidad de indivisibles: es el principio del cálculo de una integral definide.

Observemos que esta situación se refleja en la figura



Esta propiedad se puede enunciar de forma más general: si f(x) es una función continua en [a, b] entonces para cualquier valor K comprendido entre f(a) y f(b) existe un punto c tal que f(c)= K

3) Si una función está definida en el intervalo cerrado [a, b] y es continua en todo el intervalo, entonces la función está acotada en [a, b] y existe un punto de intervalo c, tal que f(a) = ext. sup f(x) con $x \in [a, b]$

y un punto $c_2 \in [a, b]$ tal que $f(c_2) =$ ext inf. f(x) con $x \in [a, b]$

Demostración

la demostración la hacemos por reducción al absurdo. Si f(x) no está acotada en [a, b], podemos encontrar en [a, b] una sucesión de puntos distintos $x_1, x_2 \ldots x_n$ tal que $f(x_n) > K$

La sucesión $\{x_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación (teorema de Bolzano). Llamamos x_0 a dicho punto de acumulación, desde luego $x_0 \in [a, b]$.

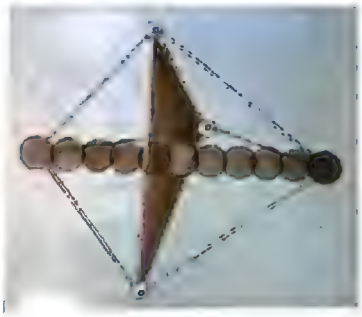
En todo entorno de x_0 habría puntos para los que f(x) es mayor que cualquier número prefijado de antemano, esto es

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, con lo que f(x) no sería continua en contra de la hipótesis inicial.

Demostrado que la función está acotada, está claro que existirá

$$\text{ext sup } f(x) \quad x \in [a, b]$$

$$\text{ext inf } f(x) \quad x \in [a, b]$$



La medida del tiempo se hace cada vez más esmerada con el paso de los siglos. Al principio, para saber la hora, se observaba la posición del sol en el cielo. Las meridianas, que aparecen alrededor del 1.500 a.J.C., hicieron posible una división más exacta del día en horas. El descubrimiento de Galileo sobre la duración constante de las oscilaciones del péndulo permite, en el siglo XVII, el desarrollo de relojes mucho más precisos de los existentes entonces.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Los relojes de amoníaco, realizados en 1948 por vez primera, señalan la hora en base a las vibraciones de la molécula de amoníaco. Cuando una onda de radio con la frecuencia apta estimula la molécula, un solo átomo de nitrógeno (circulo *rosa)* vibra sobre un plano determinado por tres átomos de hidrógeno (círculos *blancos).* Sus vibraciones son tan regulares que las variaciones pueden ser de un solo segundo cada 3.000 años.

veamos que estos valores alcanzan para puntos del intervalo.

$$M = \text{extr. sup } f(x) = \text{extr. sup } f\,[a, b]$$
$$x \in [a, b]$$

entonces si M es un elemento de f {[a, b]} es que existe $c_1 \in [a, b]$ tal que $f(c_2) = L$.

Si suponemos que no es un elemento de f {[a, b]}, entonces sería un punto de acumulación de dicho conjunto tal que existe al menos una sucesión de elementos distintos de [a, b], $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ tal que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M$, pero esta sucesión admite, al menos un punto de acumulación, sea $x_0 = c_2$, se tiene entonces que $M = f(x_0)$ por ser f continua en todo [a, b]. Esto significa que $M \in f[a,b]$

Análogamente demostraríamos que el extremo inferior también pertenece a f {[a, b]}.

12.5.—Composición de funciones continuas

Si f: A → R es una función continua en x_0 y g: B → R es una función también continua en $f(x_0)$ y de modo que $f(A) \subset B$ entonces g . f es una función también continúa en x_0.

La demostración es inmediata, recordando lo que vimos acerca del límite de una función compuesta.

Por ser f(x) continua en x_0 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Por ser g(x) continua en $f(x_0)$ $\lim_{x \to f(x_0)} g(x) = g(f(x_0))$

Ejemplos $\lim_{x \to x_0} h(x) = g(f(x_0)) = h(x_0)$

$e^{f(x)}$, $L \cdot (f(x)$ con $f(x) > 0$, $\cdot \operatorname{sen}(f(x))$, $\cos(f(x))$, etc.

Vamos a ver ahora una serie de cuestiones relativas a funciones inversas.

1) Sea f(x) una función estrictamente creciente en el intervalo [a, b], entonces existe la función inversa y es estrictamente creciente.

En primer lugar f(x) es estrictamente creciente si $x_i < x_j \Rightarrow f(x_i) < f(x_j)$ y esto se cumple ..... $\forall x_i, x_j \in [a, b]$.

Desde luego si $x_i \neq x_j \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_j)$ luego la función es biyectiva. Desde luego estamos considerando como conjunto imagen [f(a), f(b)], la función inversa en estas circunstancias existe

$$[a, b] \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [f(a), f(b)]$$

y es creciente. ... Si no lo fuese, tendríamos:

$$y_i < y_j \Rightarrow f^{-1}(y_i) > f^{-1}(y_j)$$

$$f^{-1}(y_i) = x_i \quad f^{-1}(y_j) = x_j;\ x_i > x_j \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_i > y_j$ lo que iría en contra de la hipótesis.

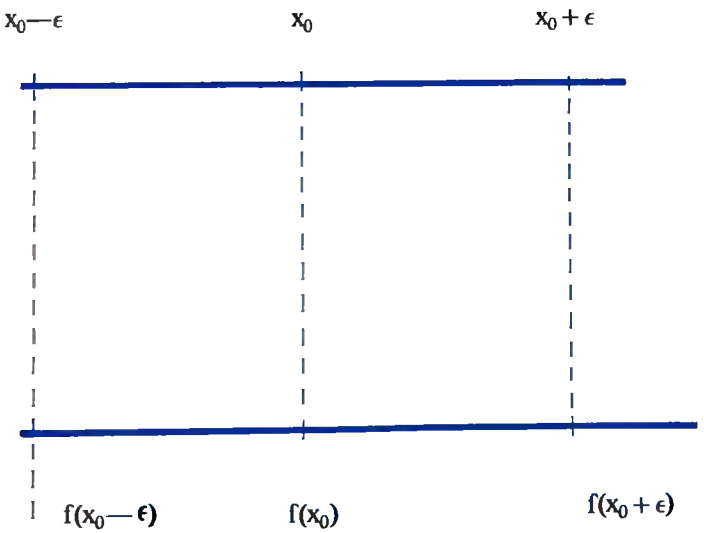
2) Sea f(x) una función estrictamente creciente y continua en [a, b] entonces f^{-1} es continua en [f(a), f(b)]

En efecto sea $y_0 \in [f(a), f(b)]$, vamos a ver que f^{-1} es continua en y_0; suponemos $f(x_0) = y_0$.

Tomemos un $\epsilon > 0$, cualquiera y consideremos el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ de [a, b]

Desde luego $y_0 \in [f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)]$

observemos la figura



Tomemos δ = mínimo $\left[f(x_0 + \epsilon) - f(x_0),\ f(x_0) - f(x_0 - \epsilon)\right]$

. Entonces resulta: $(y_0 - \delta\ y_0 + \delta) < [f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)]$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ |y - y_0| < \delta \Rightarrow [f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) =$$

$$= |x - x_0| < \epsilon$$

luego f^{-1} es continua como queríamos demostrar.

De manera análoga se procedería para demostrar la continuidad a la derecha de a y a la izquierda de b.

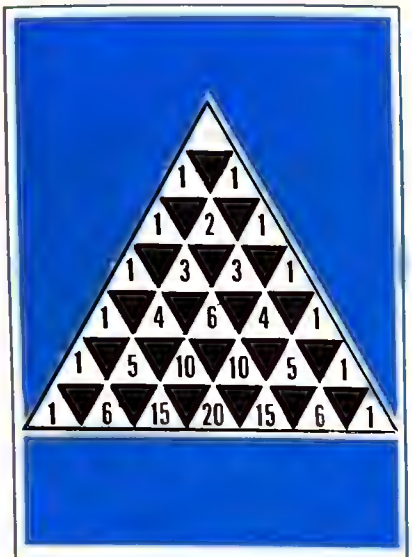
PASCAL (Blaise)

MATEMATICO, físico y escritor francés, nació en Clermont-Ferrand en 1623 y falleció en París en 1662. Hijo de familia de la alta burguesía (su padre era fiscal). A los siete años de su nacimiento, ya su familia se asentó en París y fue allí donde desde bien pequeño frecuentó los medios literarios y científicos. Bien podemos decir que el joven Blaise fue un «niño prodigio de la ciencia», ya que a la edad de once años publicó su primera obra («Tratado de los sonidos»). A los doce años comenzó sus primeros estudios de geometría. A esta edad ya fue admitido en los medios literarios y científicos de París. A los dieciséis años escribió «Ensayo sobre les cónicas». A la edad de diecinueve años ideó una máquina de calcular (quizá sea la primera): consiste en seis rodillos numerados del «0» al «9» y un rodillo para unidades, otro para decenas, otro para centenas... y al pasar de diez las unidades, movía la máquina sola un punto del rodillo de las decenas y así sucesivamente.

Este modelo los perfeccionó en 1652.

Tuvo varias entrevistas con Descartes, pero no llegaban nunca a estar de acuerdo en sus estudios y conclusiones ya que llevaban caminos distintos, sobre todo en las teorías sobre el vacío.

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

Es curioso que después de grandes experimentos sobre el vacío, llegase a las mismas conclusiones que Torricelli. Fue por entonces cuando publicó sus obras «Nuevos experimentos sobre el vacío» y «Prefacio para un tratado sobre el vacío».

Los experimentos de Torricelli los realizó en la práctica en el pico de Dome y en la torre de Saint-Jacques de París.

Durante los años 51 al 54 se dio a las diversiones y a la vida mundana de París, donde después de un accidente se retiró a la abadía de Port-Royal des Camps, dedicándose a la penitencia.

Resolvió posteriormente el problema de la cicloide con unos nuevos métodos de improvisación y parelelos al moderno cálculo integral.

El logro mayor de Pascal fue su teoría de la prensa hidráulica: «Toda variación de presión ejercida de un punto de un líquido incomprensible en equilibrio, se transmite con la misma intensidad en todas direcciones».

Antes de contar cuarenta años fallecía en París. Sus notas fueron recopiladas por sus amigos y publicadas en la obra «Pensamientos».

A partir de aquí se introduce el concepto de homeorfismo: *«diremos que una función definida sobre I es un homeomorfismo o aplicación topológica cuando f es una biyección y las funciones f y f^{-1} son ambas continuas.*

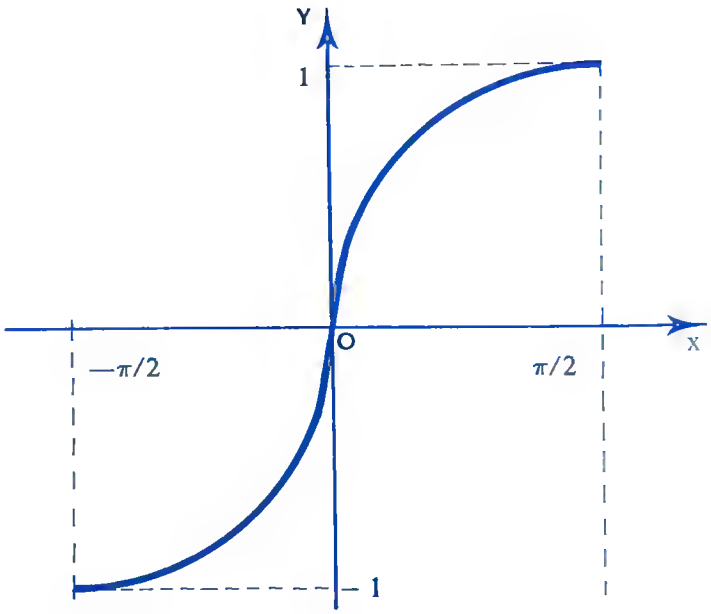
Pasemos a considerar algunos ejemplos:

Funciones exponencial y logarítmica. La función e^x es continua y estrictamente creciente en R si $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

La inversa de la función e^x es Lx que es también estrictamente creciente y continúa.

Consideremos a continuación las funciones trigonométricas.

1. $f(x) = \text{sen } x$. La gráfica se indica en la figura



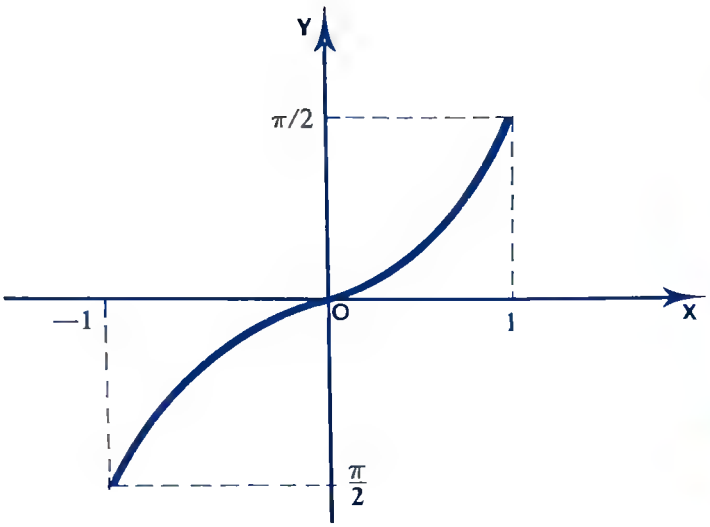
Esta función es creciente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es también continua en dicho intervalo

$$\text{sen } (\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\text{sen } (-\frac{\pi}{2}) = -1$$

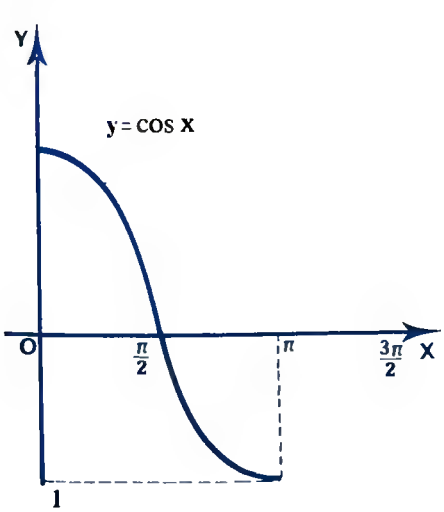
Luego está definida la función inversa $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$ y es estrictamente creciente y continua en el intervalo $[-1, 1]$.

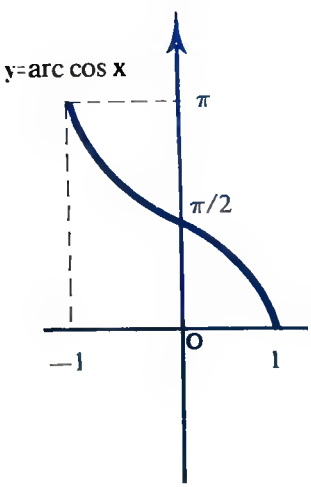
Luego la gráfica será



Nótese que no consideramos la función sen x definida en toda la recta real, en la cual no sería inyectiva, sino sólamente su restricción al citado intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2 $f(x)=\cos x$. Definida en el intervalo cerrado $(0, \pi)$ es estrictamente creciente y continua. Ella transforma dicho intervalo en $(-1, 1)$. Esta función es por tanto un homeomorfismo del primer intervalo sobre el segundo y su función recíproca $f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$ definida en $(-1, 1)$ y con valores en $(0, \pi)$, es también continua y estrictamente creciente. Nótese que como en el caso anterior no hemos considerado la función cos x definida en toda la recta real, en la cual no sería inyectiva si no sólo son restricción al intervalo $[0,\pi]$.





Las matemáticas pueden convertirse muchas veces en un divertido juego y las actuales calculadoras pueden aumentar esta diversión al ahorrarnos pesados cálculos. Un simpático ejemplo lo tenemos en el cálculo de la fecha de nacimiento de un amigo mediante algunas operaciones sencillas, sigue nuestras instrucciones. Entrégale tu calculadora y dile que escriba el día y el mes de su nacimiento (cada una de ellas con dos cifras, es decir, emplazando el cero como cifra no significativa). A continuación debe realizarse las siguientes operaciones, primero multiplica por 2 y a la cifra resultante le agregas un 5, multiplica por 5 luego por 10 y a esta última cantidad obtenida le agregas las dos últimas cifras correspondientes al año de su nacimiento. Bastará que tú le restes 250 para obtener una cantidad de 6 cifras de modo que en la izquierda aparecen los correspondientes al día, en el centro las del mes y las dos últimas te indicarán el año. Resulta una sencilla y muy divertida manera de averiguar la edad y el cumpleaños de una amiga.

Aquí tenemos otro «juguecito» matemático con calculadora para averiguar edades. Esta vez es aún más sorprendente pues podemos calcular la edad de 2 personas a la vez. El procedimiento es sencillo, que una de ellas escriba la edad de la mayor de ambas la multiplique por 5, le agregue 36 y multiplique de nuevo esta vez por 20 y ahora debe sumarse la edad de la menor. Ya solo tienes que restar 720 y obtendrás una cantidad de modo que las primeras cifras te indicarán la edad de la mayor y las dos últimas la de la más joven. Aquí tienes un ejemplo con dos amigas de 18 y 21 años.

$21 \times 5 = 105$; $10536 \times 20 = 210720$

$210720 + 18 = 210738$

$210738 - 720 = 21\ 00\ 18$

Ya tenemos la edad de nuestras amigas.

3. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$, definida en el intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

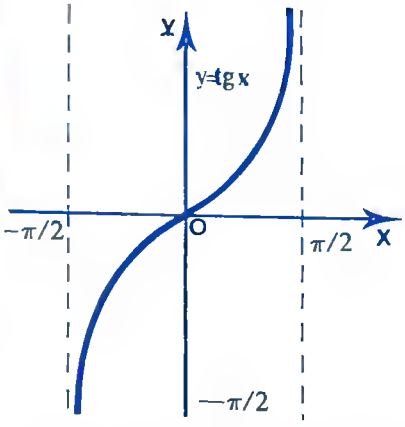
es continua y estrictamente creciente, además

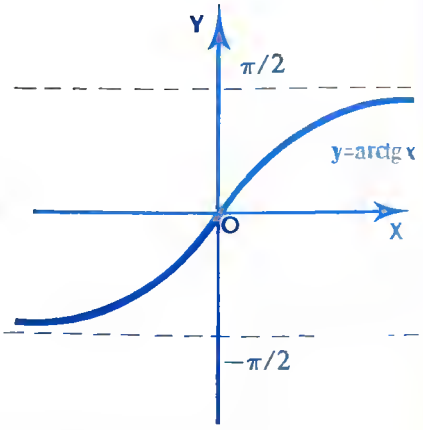
$$\lim_{x \to -\pi/2} \operatorname{tag} x = -\infty \qquad \lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tag} x = \infty$$

luego esta función es un homeomorfismo sobre toda la recta real. Su función inversa estará definida en R y será continua y estrictamente creciente. Esta función transforma R en el intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como en en los casos anteriores, obsérvese que no hemos partido de la función tg x en su más amplio campo en la recta real, sino de su restricción al citado intervalo

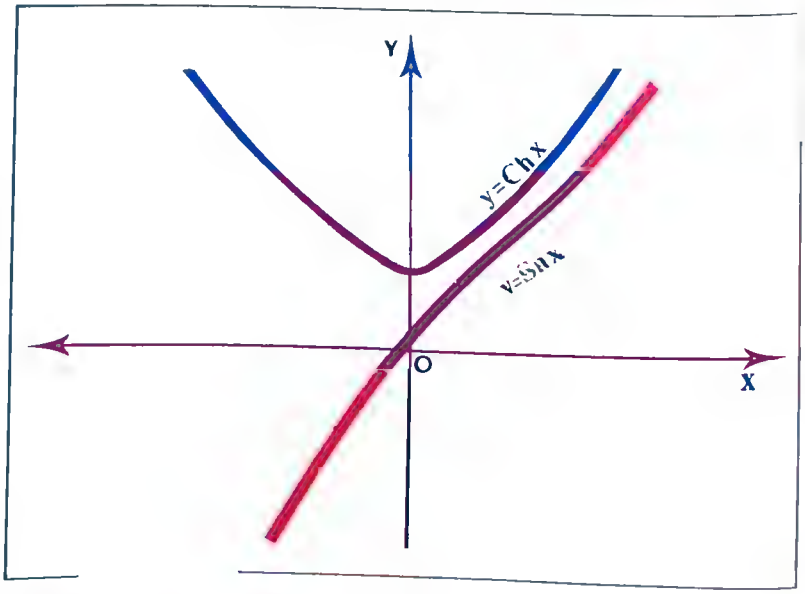




4. Pasemos ahora a estudiar las funciones hiperbólicas.

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Las gráficas de estas funciones las indicamos en la figura



La función $f(x) = \text{sh}x$ definida en toda la recta real es continua, estrictamente creciente, pues poniendo

$$\text{sh } x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

aparece como diferencia de una función creciente y otra decreciente.

$$\text{Además } \lim_{x \to -\infty} \text{sh } x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \text{sh } x = +\infty$$

Como inmediatamente se comprueba

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2} - \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = -\infty$$

Luego esta función es un homeomorfismo de R en R. La función inversa $f^{-1}(x) = \text{arg sh } x$ (argumento seno hiperbólico) es también continua y estrictamente creciente y aplica la recta real sobre si misma.

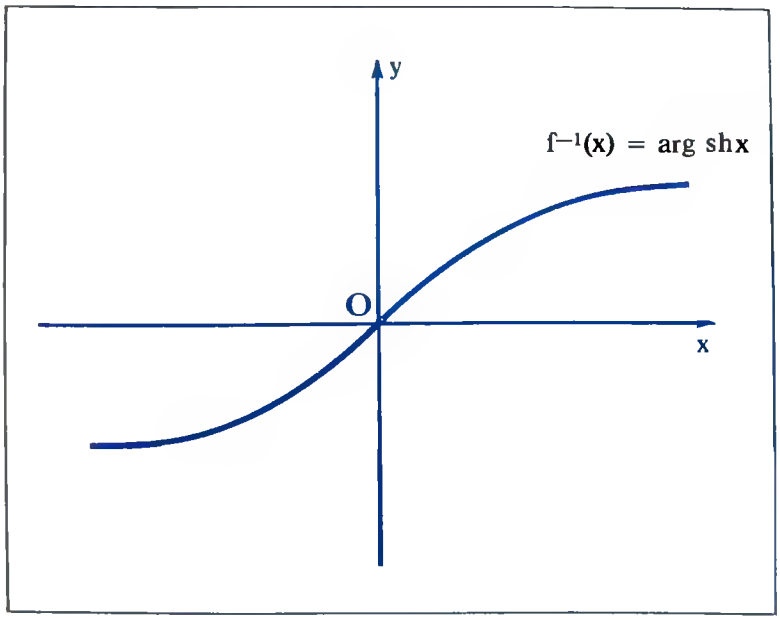
Vamos a calcular algunos valores.

$$\text{arg sh } 0 = 0. \text{ Pues } \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = 0$$

$$\frac{e^x}{2} = \frac{e^{-x}}{2} \Rightarrow x = 0$$

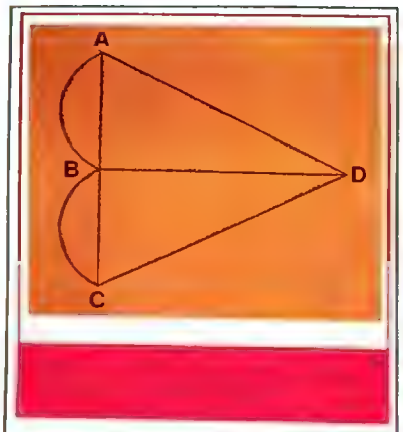
También $\text{arg sh } (-x) = -\text{arg sh } x$

Luego la función es simétrica respecto del punto (0, 0). La gráfica se indica en la figura



LOS ANTIGUOS PUENTES QUE LLEVARON A LA MODERNA TEORIA DE RETICULOS

La teoría de retículos es una de las formas más prácticas de topología, con aplicaciones a los circuitos eléctricos y a la economía. Tuvo su origen hace 200 años con Leonard Euler que resolvió dos problemas de topología 100 años antes que la topología misma tuviese nombre. Por pura coincidencia, ambos problemas, que él creía independientes, han entrado a formar parte de la que hoy es llamada teoría de retículos. Ambos problemas referían a retículos de líneas que conectaban un cierto número de puntos. El primero de ellos se refería a los puentes de Königsberg. Los habitantes de la ciudad estaban convencidos de que no podían atravesarse los siete puentes uno tras otro sin tener que pasar dos veces al menos por uno de ellos, pero ninguno conseguía explicar el por qué.



Cuando Euler tuvo conocimiento del hecho, comprendió el importante principio conexo y consiguió demostrar matemáticamente la imposibilidad de la empresa.

El segundo descubrimiento de Euler se refería a los objetos de muchas caras llamados poliedros, que pueden describirse como retículos de puntos y líneas en tres dimensiones. Estudiando estos objetos, Euler hizo un descubrimiento más importante: cualquiera que sea el número de caras de una de estas figuras, existe una relación entre el número de sus vértices, caras y artistas.

Observemos que la función que estamos considerando

Expresa:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = c;$$ y tenemos que calcular

cual es el valor de x, que verifica a la anterior ecuación. La complicación de cálculo es evidente. Una forma de obviar dicha complicación es la siguiente:

arg sh $x = L\ (x + \sqrt{x^2 + 1})$. Para demostrarlo basta observar que

sh $(L\ (x + \sqrt{x^2+1}) = x$ para todo $x \in R$

En efecto: $e^{L\ (x+\sqrt{x^2+1})} = (x + \sqrt{x^2+1})$

$$e^{-L.(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Resulta por tanto:

$$x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

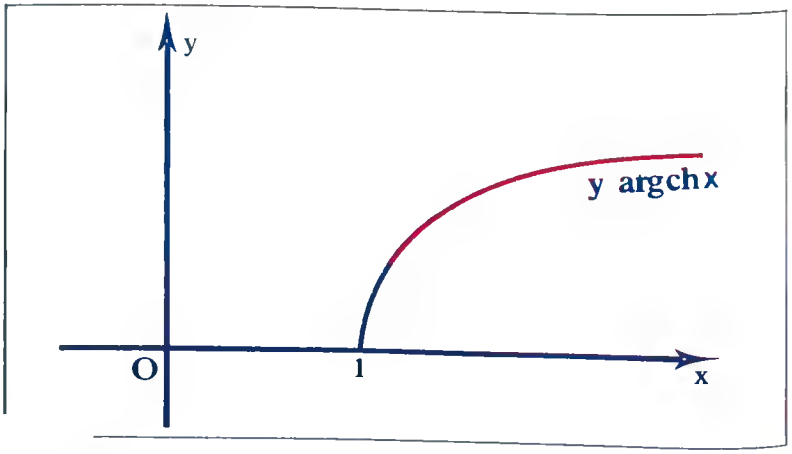
luego

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\frac{2x(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}}}{2} = x$$

Estudiemos a continuación la función continua

ch $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, que es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$, además $\lim_{x \to +\infty}$ ch $x = +\infty$ $\lim_{x \to 0}$ ch $x = 1$. La función recíproca, (argumento coseno hiperbólico de x) será por tanto estrictamente creciente y continua en el intervalo $[1, +\infty)$ y toma sus valores en $[0, +\infty)$. Su gráfico :

La indicamos en la figura



Utilizando la función logarítmica quedaría de la siguiente forma, la función argumento coseno hiperbólico:

$$\text{arg ch } x = L\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

En efecto: $\text{ch } x\,(L\,(x + \sqrt{x^2-1})) = \dfrac{e^{L(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-L(x+\sqrt{x^2-1})}}{2}$

$$e^{L\,(x+\sqrt{x^2-1})} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Sumando. Resulta:

$$e^{-L\,(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

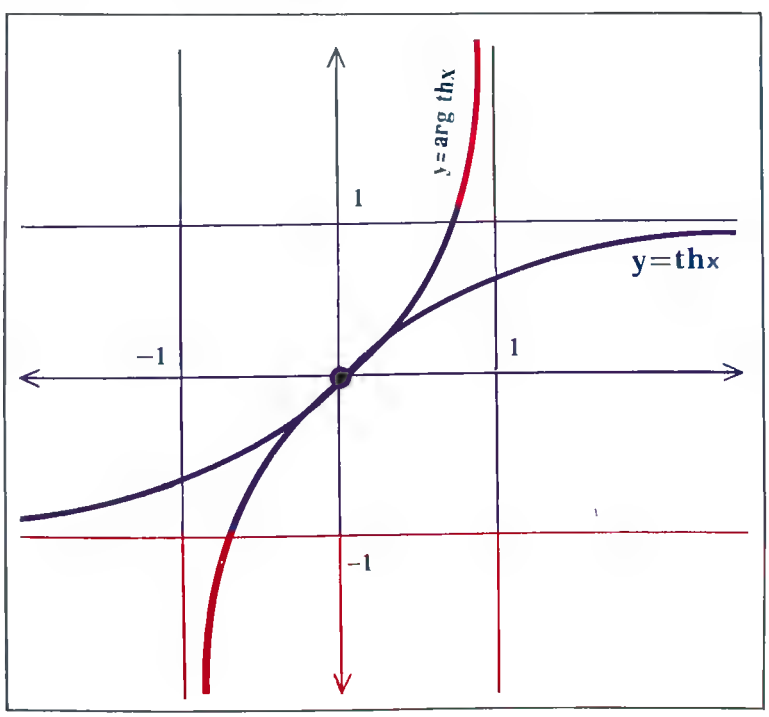
$$x + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1} + x^2-1+1}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2x$$

luego queda probado.

La función ch x en el intervalo $(-\infty, 0]$ es continua y estrictamente decreciente, además $\lim_{x \to \infty} \text{ch } x = +\infty$, luego ella es un homeomorfismo de $(-\infty, 0]$ sobre $[1, +\infty)$. La función inversa se expresa mediante:

$\text{arg ch } x = L\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$.



LOS DEDOS DE LAS MANOS Y DE LOS PIES Y LOS ANTIGUOS MODOS DE CONTAR

Se cree que algunas tribus primitivas usaban para contar, los números en base 2: 1, 2, 2-1, 2-2, 2-2-1, y así sucesivamente, y que otras usasen como número fundamental el 3: 1, 2, 3, 3-1, 3-2, 3-3, 3-3-1 y así sucesivamente. Pueblos más avanzados, al convertirse en agricultores y constructores, llevaron más adelante el límite de sus cálculos fundamentales. Muchos empleaban los dedos de las manos y de los pies y conseguían contar hasta 20, pero con los dedos terminaban también los cálculos. Estos sistemas primitivos de cómputo basados en el número 20, están todavía presentes en las palabras francesas que indican los números 80 y 90, «quatre-vingt» y «quatre-vingt-dix», y que significan respectivamente «cuatro veces veinte» y «cuatro veces veinte más diez», y en la esterlina inglesa que está constituida por 20 chelines.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

En el mundo antiguo el hombre empleó diversas formas para contar e incluso realizar pequeñas operaciones de sumar y restar. Para ello empleó lo que tenía más cerca: su propio cuerpo: los dedos de las manos e incluso los de los pies. Aún hoy hablamos de dígitos para referirnos a las cifras 1 al 9. El cálculo digital se extendió y llegó a convertirse en un cálculo corporal ya que algunos pueblos primitivos utilizaban incluso los brazos, piernas, cabeza, etc.

Los antiguos peruanos utilizaban un sistema que consistía en cuerdas con nudos que se distinguían por el color de la cuerda y la disposición de los nudos. Con este sistema de numeración registraban cualquier dato de utilidad, gracias a la prodigiosa memoria de que gozaba este pueblo.

Los mayas utilizaban signos jeroglíficos representando los números por cabezas de dioses, de hombres o de animales. Otra simbología consistía en el uso de testigos: un punto para la unidad, una barra para cinco unidades y una especie de ojo semicerrado para el cero. Así cada número lo representaban por un grupo de puntos y barras.

Por último la función $f(x) = th\ x$, definida en toda la recta real, es continua y estrictamente creciente. Como $\lim_{x \to -\infty} th\ x = -1$, $\lim_{x \to +\infty} th\ x = 1$, dicha función será un homeomorfismo de $(-\infty, +\infty)$, sobre $(-', 1)$ y su función recíproca será continua y estrictamente creciente. Es inmediato comprobar que $\arg th\ (-x) = -\arg th\ x$, para cualquier x, y que $th\ 0 = 0$. Por otra parte $\arg th\ x = 1/2\ L\ (\frac{1+x}{1-x})$ para todo x, con $|x| < 1$.

13.—CONTINUIDAD UNIFORME.

Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces para cada punto interior x_0 significa que dado un $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ que depende de x_0 tal que $|x - x_0| < \delta$, implica que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. En general, no podemos esperar que para un $\epsilon > 0$ sirva un δ fijo para todo el intervalo [a, b]. Esto sin embargo puede ocurrir. Cuando es así la función se llama *uniformemente continua* en [a, b].

Observemos que la continuidad uniforme es una propiedad global.

Definición: La continuidad de f(x) de $A \to R$ definida en un intervalo $A \subset R$ se dice uniforme en A si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos $x', x'' \in A$ tal que $|x' - x''| < \delta \quad |f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \text{sen}x$

para un ϵ cualquiera $|\text{sen}x - \text{sen}x'| = 2\left|\text{sen}\frac{x - x'}{2} \cdot \cos\frac{x + x'}{2}\right| <$

$< 2\left|\frac{x - x'}{2}\right| \cdot 1 < \epsilon$

Sin más que tomar $|x - x'| < \epsilon = \delta$ luego $f(x) = \text{sen}x$ definida en R es uniformemente continua en R.

De la definición de continuidad y continuidad uniforme se deduce que la continuidad uniforme en el intervalo implica la continuidad en él. La recíproca de esta propiedad es también válida en el caso de que el intervalo sea cerrado. Este resultado se conoce con el nombre de teorema de Heine-Carré.

«La continuidad en todo intervalo cerrado es uniforme». Hacemos la demostración por reducción al absurdo esto es, supondremos que no es uniformemente continua y veremos como llegamos a un absurdo. Así pues sea el intervalo cerrado [a, b], existirá

un $\epsilon > 0$ tal que para infinitos pares de puntos x', x'' tan próximos como se quiera sería $|f(x') - f(x'')| > \epsilon$. Dividamos el intervalo [a, b] en dos partes por su punto medio c, en uno al menos de los dos intervalos cerrados [a, b] [c, d] existirán infinitos puntos como los anteriores, pues si los pares tuviesen un punto en cada intervalo, su punto de acumulación sería c, y este sería un punto de discontinuidad, cosa que no puede ocurrir por ser f(x) continua. Dividamos ahora el intervalo que contenga a una infinidad de puntos, y así sucesivamente. Esta sucesión de intervalos contiene un punto tal que en todo entorno suyo existen pares donde los valores de f(x) difieren más de ϵ, y es por tanto un punto de discontinuidad, en contra de la hipótesis de que f(x) es continua en el intervalo cerrado [a, b].

14.—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE NATURAL.

Es una función del conjunto de los números naturales distintos del 0, en el conjunto de los números reales.

$$\mathbb{N}^* \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}$$

donde a cada número natural n le hacemos corresponder su imagen a^n, siendo a R la base y n el exponente.

Ejemplo

$$n \longrightarrow a^n$$

para a=2

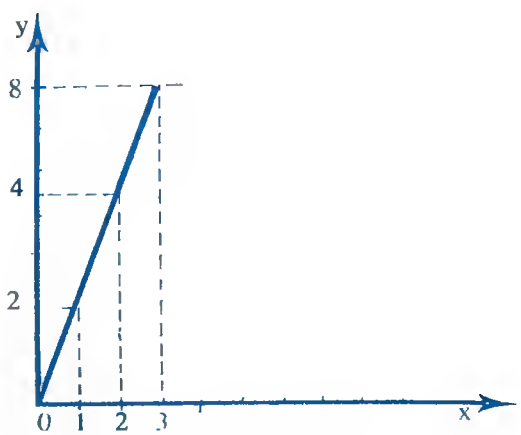
$$n \longrightarrow 2^n$$

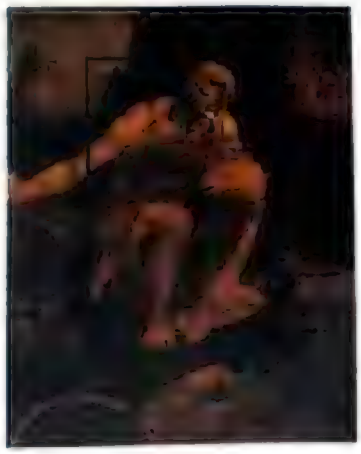
$$n = 1 \longrightarrow 2$$

$$n = 2 \longrightarrow 4$$

$$n = 3 \longrightarrow 8$$

$$n = 4 \longrightarrow 16$$

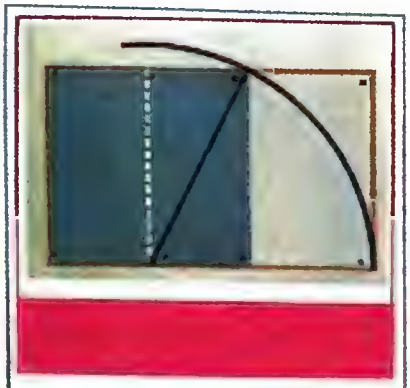




UNA REGLA AUREA PARA LA ARQUITECTURA DEL MUNDO

Los números de Fibonacci, además de tener curiosas relaciones con la botánica, parecen también ejercitar una extraña influencia sobre el arte y sobre la arquitectura en particular. La razón entre toda pareja de números de Fibonacci adyacentes, sucesivos al 3, es 1:1,6; esa es la denominada «razón áurea» o «sección áurea» que ha desconcertado durante siglos a los expertos a causa de sus conexiones con la estética. La razón, que más exactamente es 1:1,618, está presente en el pentágono, en el círculo y en el decágono, pero sobre todo en el rectángulo áureo, una figura en la que los lados tienen entre sí esa mágica relación.

continúa en la página siguiente



viene de la página anterior

Se dice que, entre todas las figuras geométricas, el rectángulo áureo es la que mayor satisfacción visual ofrece. Durante años los expertos han buscado ejemplos por todas partes, desde las construcciones de la antigua Grecia a las obras maestras de la pintura y de la escultura. Más recientemente, la validez de su vínculo con la belleza se ha puesto en duda, a pesar de que, como claramente indica la ilustracion de esta página, el rectángulo áureo está presente demasiado a menudo en el arte como para que se trate de una simple coincidencia.

Dominio.— La función exponencial está definida para todos los valores de N*.

Signo.— Todas la imágenes de esta función son positivas.

Crecimiento.

a) Cuando a < 1 la función exponencial es decreciente.

Ejemplo

$$N^* \xrightarrow{\text{exp.}} \mathcal{R}$$

$$n \longrightarrow (0'2)^n$$

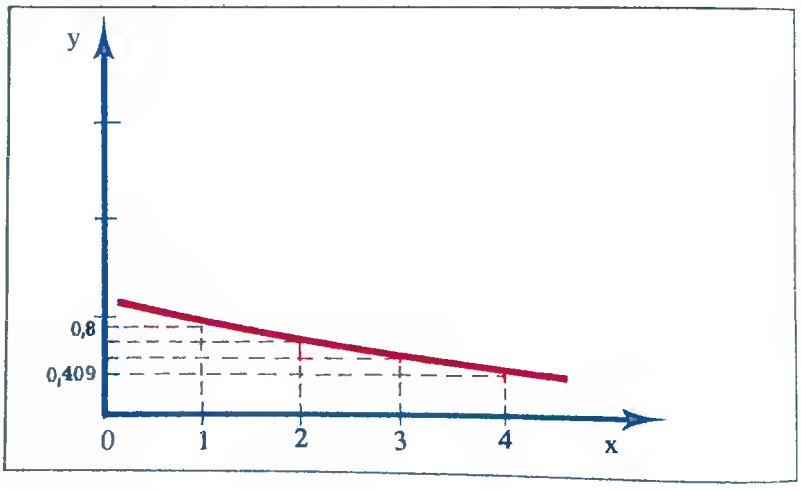
$$1 \longrightarrow 0'8$$

$$2 \longrightarrow 0'64$$

$$3 \longrightarrow 0'512$$

$$4 \longrightarrow 0'4096$$

a medida que aumenta n, la imagen es cada vez menor, por tanto la función es decreciente.



b) Si a = 1, la función exponencial es constante.

$$N^* \xrightarrow{\text{esp}} \mathcal{R}$$

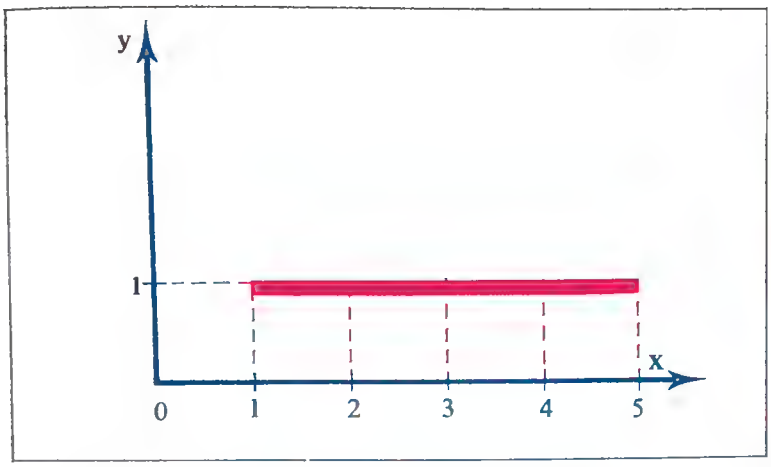
$$n \longrightarrow 1^n$$

$$1 \longrightarrow 1^1 = 1$$

$$2 \longrightarrow 1^2 = 1$$

$$3 \longrightarrow 1^3 = 1$$

$$4 \longrightarrow 1^4 = 1$$

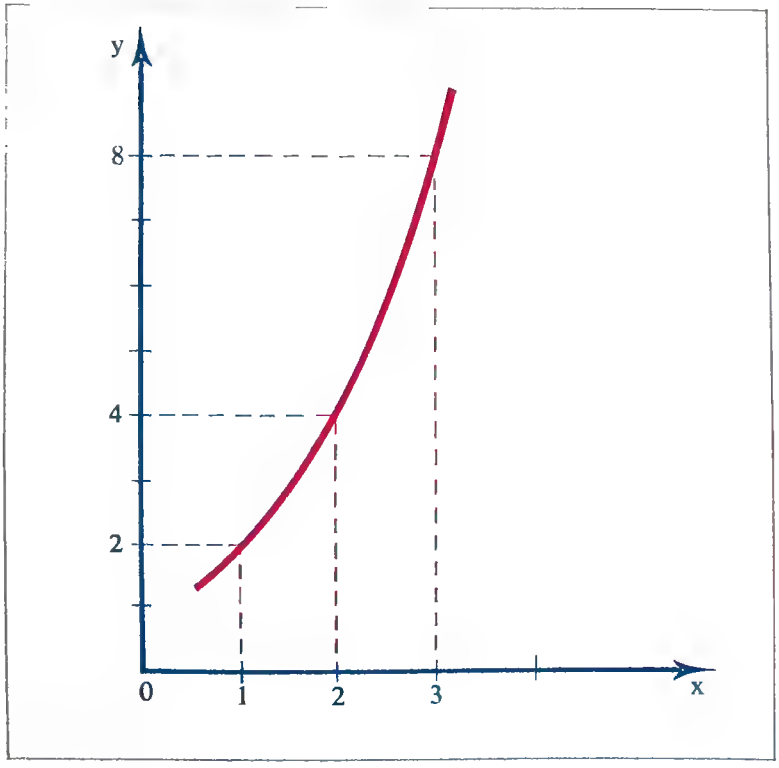


c) Si $a > 1$. La función exponencial es creciente.

Ejemplo:

$$N^* \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}$$

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16



ASTRONOMIA

La astronomía árabe no fue sin duda una ciencia abundaran las innovaciones aunque hay que reconocerle unos puntos de notable mérito: recopilación del saber clásico sobre el tema, aplicación y desarrollo de métodos matemáticos y el desarrollo y observación de estrellas con instrumentos que perfeccionaron y que aún conservan su nombre árabe.

Persisten hasta nuestros dias los nombres de las estrellas brillantes como: Aldebarán que quiere decir la siguiente porque sigue a las Pléyades, Altair el Aguina que quiere decir el águila en vuelo o Betelgueuse, Orión, que significa la espalda del Gigante.

En cuanto a la instrumentación baste recordar el cénit, almicantarates, o el astrolabio.

El astrolabio consiste en un disco suspendido de un anillo y rodeado de un disco externo o aro donde se representa el Ecuador dividido en 360.º Sobre el disco central se colocan otros más finos donde se sitúan las coordenadas en posición polar estereográfica según la latitud y otro sobre el que se representa el zodiaco.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Mediante el astrolabio se determina la posición de las estrellas en un momento determinado.

El interés que han demostrado desde siempre todas las civilizaciones por la astronomía ha supuesto no sólo el desarrollo de esta ciencia sino también de todo tipo de «instrumentos» matemáticos que precisa. Así se evolucionó en la trigonometría construyendo tablas de senos que se empleaban en cálculos astronómicos.

La función trigonométrica seno nos viene legada por los indios que la denominaban y-iwa que al pasar a formar parte del saber árabe adaptó su nombre al árabe yib.

En las traducciones que de los manuscritos árabes se realizaron con posterioridad el término yib se confundió con otro árabe de significado bien distinto yayb que quiere decir bolsillo y que traducido al lenguaje oficial de la ciencia en la época, que era el latín, pasó a llamarse sinus.

Será entonces del latín sinus del que deriva el término castellano seno con el que la designamos en la actualidad, aunque en algunos idiomas aún conserve su forma latina.

Propiedad fundamental de la función exponencial de variable natural.—

La exponencial de la suma es igual al producto de los exponenciales de los sumandos:

$$n + m \longrightarrow a^{n+m} = a^n a^m$$

Ejemplo

Conocidos los valores $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$ podemos calcular el valor de 2^5:

$$2^5 = 2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$$

15.—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE ENTERA.

Conocemos que a^n es igual $a^{1/n}$ por tanto podemos ampliar el concepto de función exponencial al caso de variable entera.

$$Z \xrightarrow{\exp} \mathcal{R}$$

En este caso el dominio serían todos los números enteros

15.1.—Propiedades de las funciones exponenciales de variable entera.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplo

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$$

16.—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE RACIONAL.

Sabemos que $a^{m/n}$ es igual a $(a^n)^m$ siendo $a > 0$ por tanto podemos volver a ampliar el dominio de definición de la función exponencial a todos los números racionales.

$$a \xrightarrow{\exp} \mathcal{R}$$

donde $x \longrightarrow a^x$

pudiendo ser x un número tanto negativo como positivo, entero, o fraccionario.

16.1.—Propiedades de la función exponencial de variable racional.

Sean a y b número reales positivos y $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ fracciones con n y q positivos, se verifican las siguientes propiedades:

a) $(a \cdot z)^{m/n} \cdot z^{m/n}$

Demostración de esta propiedad.

$(a \cdot z)^{m/n}$, $m > 0$

$$(a \cdot z)^{m/n} = \sqrt[n]{(a \cdot z)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot z^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{z^m}$$
$$= a^{m/n} \cdot z^{m/n}$$

Ejemplo:

Sean $2^{1/2} = \sqrt{2} = 1'414$ y $3^{1/2} = \sqrt{3} = 1'732$ queremos calcular el valor de $6^{3/2}$, utilizando la propiedad anterior tenemos

$$6^{3/2} = (3 \cdot 2)^{3/2} = 3^{3/2} \cdot 2^{3/2} = (3^{1/2})^3 \cdot (2^{1/2})^3 =$$
$$= (\sqrt{3})^3 \cdot (\sqrt{2})^3 = (5'2)\,(2'83) = 14'72$$

b) $$\left(\frac{a}{z}\right)^{m/n} = \frac{a^{m/n}}{z^{m/n}}$$

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{3^{3/2}}{2^{3/2}} = \frac{(3^{1/2})^3}{(2^{1/2})^3} = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{2})^3} = \frac{5'2}{2'83} = 1'84$$

c) $$(a^{m/n})^{p/q} = a^{mp/nq}$$

Ejemplo:

$$(3^{5/2})^{4/5} = 3^{20/10} = 3^2 = 9$$

d) $$a^{m/n} \cdot a^{p/q} = a^{m/n + p/q}$$

Ejemplo:

Calcular $8^{11/6}$ conociendo: $\sqrt{8} = 2'82$ y $\sqrt[3]{8} = 2$

$$8^{11/6} = 8^{1/3} \cdot 8^{3/2} = (\sqrt[3]{8}) \cdot (\sqrt{8})^3 = 2 \cdot (2'82)^3 = 44'86$$

c) $$\frac{a^{m/n}}{a^{p/q}} = a^{m/n - p/q}$$

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior calcular $8^{7/6}$

$$8^{7/6} = 8^{3/2 - 1/3} = \frac{(\sqrt{8})^3}{(\sqrt[3]{8})} = \frac{(2'82)^3}{2} = \frac{23'43}{2} = 11'22$$

17—FUNCION EXPONENCIAL DE VARIABLE REAL.

Podemos ampliar el conjunto original de la función exponencial y llegar a la función exponencial de variable real

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow a^x$$

WALLIS (John)

MATEMATICO inglés, nació en Ashford en 1616 y falleció en Oxford en 1703. Se dedicó por entero a dos facetas en su vida: la carrera eclesiástica y la de las ciencias. Fue nombrado profesor de la universidad de Oxford en 1649 (cátedra de geometría).

Fue uno de los muchos científicos obsesionados con el número π. En su «Aritmética infinitorum», estudia la fórmula para poner $\frac{\pi}{2}$ en forma de producto infinito.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}$$
$$\cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

También empleó el sistema de exponentes negativos y fraccionarios.

Wallis fue uno de los precursores del cálculo infinitesimal.

LA RUEDA Y EL EJE

Del torno a la turbina de vapor: siempre palancas, pero rotatorias.

Antiguamente, se dieron cuenta del hecho de que en la palanca, potencia y resistencia podían girar alrededor del punto de apoyo. Cuando finalmente consiguieron inventar un palanca que hacía un giro completo, es decir rodar 360°, surgió la segunda de las cinco máquinas fundamentales: la rueda con su eje.

Uno de los primeros usos de esta máquina elemental fue el torno, un dispositivo que consentía elevar cargas demasiado pesadas como para hacerlo a mano. Se ató un cable al peso, uniendo el otro cabo a un eje en torno al que giraba una rueda provista de resaltes aptos para la maniobra. De la misma forma en que vimos para la palanca, el esfuerzo depende de la relación entre las distancias: la del radio del eje y le del radio de la rueda. Por consiguiente, una rueda de 20 cm. de radio colocada aobre un eje de 1 cm. aumenta la fuerza en 20 veces, mientras que sobre el mismo eje de 1 cm. una rueda de 40 cm. de radio multiplica la potencia por cuarente. E igualmente que les palancas pueden accionarse con otras palancas, así es posible aumentar una serie de engranajes de diferente diámetro. Entre las múltiples y difundidas aplicaciones de estos sistemas de palancas rotatorias podemos recordar algunos dispositivos que, por muy familiares que nos resulten, no soñaríamos definir como ruedas en el sentido más alto del término: el atornillador, el grifo, la llave de la cerradura.

Dominio.—

La función exponencial está definida para todos los valores de la recta real, es decir, el intervalo $(+\infty\ -\infty)$.

Signo.—

Las imágenes de la función exponencial son positivas. Se verifica que:

a) Si $a > 1$ y $x > 0$, entonces, $a^x > 1$

Si $a > 1$ y $x < 0$, entonces, $a^x < 1$

b) $a^0 = 1$ para cualquer número "a" real, positivo.

c) Si $a < 1$ y $x > 0$, entonces, $a^x < 1$

Si $a < 1$ y $x < 0$, entonces $a^x > 1$

Variación.—

Para $a > 1$ la función exponencial es estrictamente creciente.

Para < 1 la función exponencial es estrictamente decreciente.

Continuidad.—

La función exponencial es continua para cualquier valor de $\mathbb{R}$.

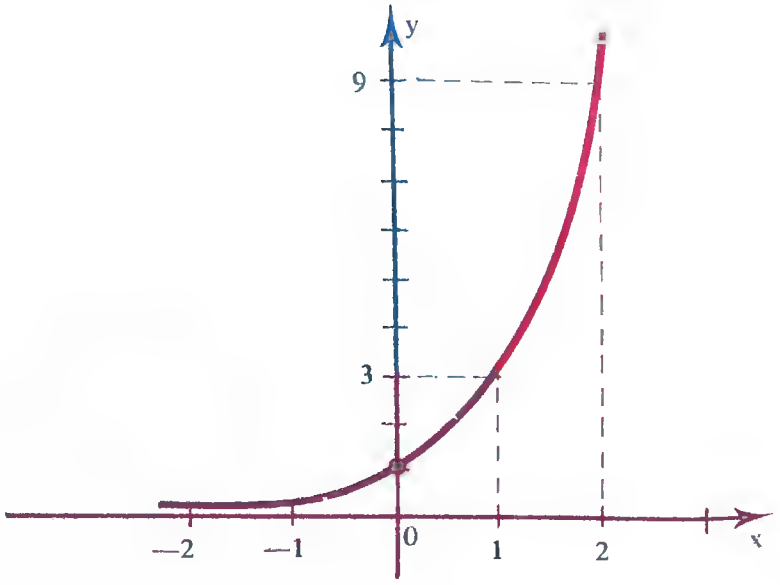
17.1.—Representación gráfica de la función exponencial de variable real.

Con todos los datos que hemos visto anteriormente, para la representación gráfica tendremos que distinguir entre $a > 1$ y $0 < a < 1$

Ejemplo

Vamos a representar la función $y = 3^x$

x	$-\infty$	⟶	−2	−1	0	1	2	∞
y	0	⟶	1/9	1/3	1	3	9	∞



17.2.—Limite de la funcion exponencial de variable real

a) Si $a > 1$ a) $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, en efecto:

$a = 1 + a'$, $a' > 0$ y por la propiedad arquimediana:

$\exists \nu \in N$, $\nu a' > K$, para cualquier K que hallamos seleccionado previamente. Ello nos permite decir que:

$$a^{\nu} = (1 + a')^{P<\nu>a'>K}$$

si teníamos $k = \nu$ resulta que para $x > K$, $a^x > K$. Luego está probado que el límite es $+\infty$.

Recordemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si para $\forall K > 0$ es posible encontrar $k > 0$ tal que $x > k \Rightarrow f(x) > K$.

b) $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Recordemos que por definición para $\epsilon > 0$ tiene que existir un k (negativo y en valor absoluto tan grande como queramos) tal que $a^x < \epsilon$ si $x < k$.

Como aquí estamos trabajando con números negativos adoptamos la siguiente notación:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} \qquad -x \in R^+$$

Si elegimos $\epsilon > 0$ tenemos:

$$\frac{1}{a^{-x}} < \epsilon, \text{ igualando: } \frac{1}{a^{-x}} = \epsilon$$

Calculamos el valor de x, tomando logaritmos y tenemos que:

$$x \lg a = \lg \epsilon \qquad x = \frac{\log \epsilon}{\log a} = k$$

luego para $x < k$ $(k \in R^-)$ tendríamos:

$$a^x < \epsilon$$

Veamos un ejemplo $a = 5$, $\epsilon = 10^{-10}$

$$\text{resolviéndolo } \frac{\lg \epsilon}{\lg a} = k = -14{,}3068$$

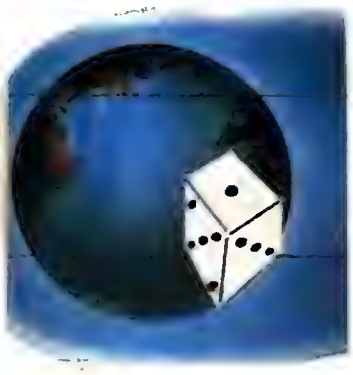
Si tomo $x = -15$, $(-15 < -4{,}3068)$ resultará:

$$a^{+x} = \frac{1}{a^{-x}} = 3{,}2768 \cdot 10^{-11} < 10^{-10}$$

c) Intentemos calcular: $\lim_{x \to 0} a^x = 1$

LA RUEDA Y EL EJE COMO PALANCA

En la rueda hidráulica (*arriba a la izq.*) el agua representa la potencia, el radio de la rueda el brazo de la potencia, mientras que la fuerza ejercida por la máquina sobre el eje constituye la resistencia y el radio del eje el brazo de la resistencia. El segundo gráfico muestra un motor (*a la derehca*) que hace girar una gran rueda que a su vez conduce otra pequeña. Mientras que la grande hace 120° (zona sombreada), la pequeña cumple un giro completo. La velocidad de rotación de la rueda grande se triplica.



Para establecer un criterio unificado del horario terrestre se dividió convenientemente la Tierra en 24 sectores o husos horarios, es decir tantos como horas del día terrestre. De este modo e independientemente de la posición solar se acuerda que los Estados que se encuentran en el mismo huso horario tengan la misma hora, así España se encuentra en el mismo huso horario que Gran Bretaña, Francia, Países Bajos, Portugal, Argelia, Mali, Ghana y Togo. Todos estos países están en el huso correspondiente al meridiano de Greenwich, meridiado 0°.

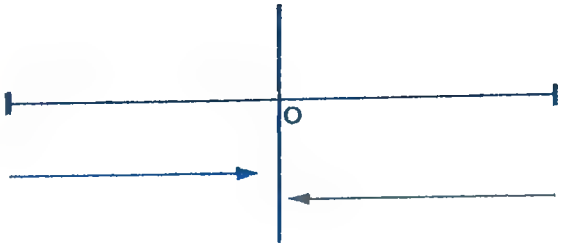
El resto de los países se encuentran incluidos en husos más o menos próximos, así países como Italia, Dinarmarca, Suecia, Alemania, Noruega, Polonia, Austria, etc., que se encuentran incluidos en el huso inmediato del Este, presentan una diferencia horaria de 1 hora en avance, en tanto que Mauritania e Islandia, al Oeste, tienen 1 hora de atraso, esto es respecto a España y los países de este huso.

Es curioso resaltar que se ha acordado también una línea de cambio de día que se encuentra en el Pacífico de forma que las Islas allí situadas a ambos lados y no demasiado distantes disfruten al "mismo tiempo" de días diferentes. El hoy y el ayer separados por una línea imaginaria.

Hay que demostrar que cualquiera que sea $\epsilon > 0$ existe otro número δ tal que $|a^x - 1| < \epsilon$ para todo $|x| < \delta$. Esto significa que:

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

Vamos a ir considerando límites a la derecha y límites a la izquierda.



Para ello vamos a considerar la siguiente cuestión sea $r \in Q^+$ cualquiera que sea $\epsilon > 0$ existe otro número real $\delta > 0$ tal que $x^r < \epsilon$

con $0 < x < \delta$. En efecto, si tomamos:

$$0 < \delta < \epsilon^{1/r}, \quad 0 < x < \delta$$

entonces $$x^r \leq \delta^r \leq \epsilon$$

Pasamos ahora a nuestro caso:

Podemos elegir r_o racional de modo que:

$$|r| < r_o \Rightarrow |a^r - 1| < \epsilon$$

Tomemos: $\delta = r_o$

si $|x| < \delta$, se tiene: $0 < a^x - 1 < 1 - a^{-\delta} < \epsilon$

si $x > 0$ y $0 < 1 - a^x < 1 - a^{-\delta} < \epsilon$

si $x < 0$ luego $\lim_{x \to 0} a^x = 1$

d) Veamos el $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$

lo demostraremos por el siguiente camino. Cualquiera que sea el número real $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|a^{x_0+x} - a^{x_0}| < \epsilon$ para todo x_0 con $|x| \leq \delta$. Esto significa que

$$\lim_{x \to x_0} a^{x_0+x} = a^{x_0}.$$

Por la propiedad que hemos visto anteriormente, para $\epsilon < a^{x_0}$ debe existir $\delta > 0$ tal que $|a^x - 1| < \epsilon/a$ para todo x con $|x| \leq \delta$ como $|a^{x_0+x} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^x - 1|$

resultará:

$$|a^{x_0+x} - a^x| < \epsilon \text{ para todo x con } x \leq \delta$$

luego queda demostrado.

18.—FUNCION EXPONENCIAL NEPERIANA.

La función exponencial que toma como base el número "e" recibe el nombre de función exponencial neperiana.

$$f.\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow e^x$$

Al ser $e > 2$, las propiedades de las funciones exponenciales neperianas serán las correspondientes a una función exponencial de base $a > 1$. Entonces se verifica

a) $e^0 = 1$

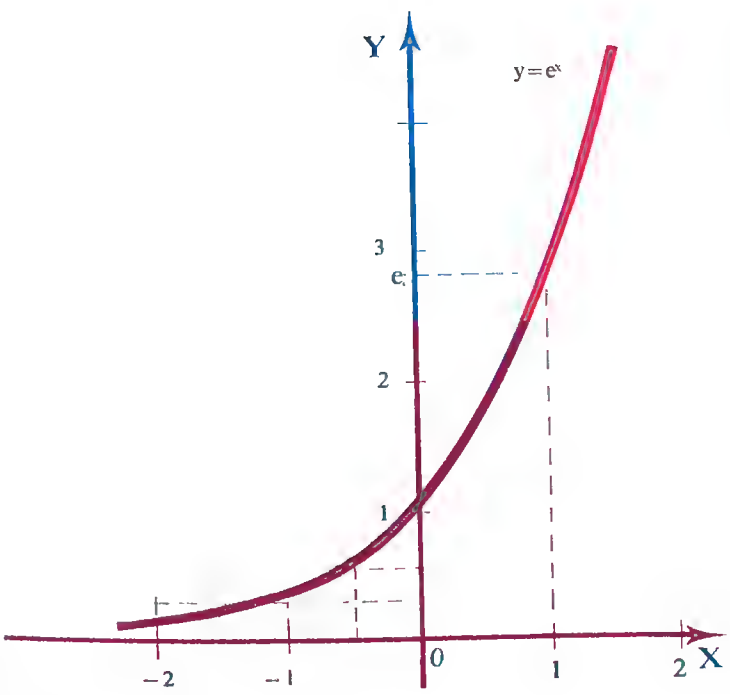
b) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

c) $e^{x+x'} = e^x \cdot e^{x'}$

d) $(e^x)^{x'} = (e^{x \cdot x'})$

18.1.—Representación gráfica de la función exponencial neperiana.

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	∞
$y=e^x$	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2	∞



Las campanas son un medio de comunicación con un lenguaje propio, nos indican los oficios religiosos y antiguamente indicaban la llegada del rey, o alarma de incendio o guerra con el toque de arrebato. Todos sabemos al escucharlas si voltean y repican en señal de alegría o si sus tañidos sordos anuncian el toque de difuntos.

Ya en el II milenio a. C. existían en China pero fue el cristianismo el que difundió su uso colocándolas en lo alto de las torres de sus iglesias: los campanarios, entorno a los cuales parecen crecer los pueblos. No sólo se usan campanas sino que además éstas pueden agruparse formando carrillones que a partir del XVI interpretan sencillas melodías.

Hay incluso campanas famosas por su significado como la de la libertad en Filadelfia que se rajó en el alegre repique de independencia o aquellas gigantes como la del Kremlim, en Moscú, fundida en 1733 con 193 toneladas, la de Mingcon en Birmania 88, Chonán en Japón 75, la de Pekln con 54 y la de la catedral de Colonia forman el grupo de las campanas más grandes.

PLANOS INCLINADOS PARA LEVANTAR PIEDRAS

El levantamiento de piedras pesadas fue un problema a resolver por los antiguos constructores egipcios. Estos ingenieros —grandes conocedores de la geometría— construían planos inclinados de tierra hasta el nivel de la construcción, luego una parte horizontal y más planos inclinados girando alrededor de la Pirámide. Las piedras, cargadas sobre trineos, eran arrastradas sobre la rampa por escuadras de 18-20 hombres la rampa crecía así junto con la construcción. Llegados a la cumbre, 135 metros de tierra, la rampa se deshacía.

Otra empresa igualmente grandiosa fue la construcción del interior de la Pirámide: La cámara tumbal del Faraón, la Gran Galería, los corredores y sus tomas de aire. El techo de estas estructuras, especialmente el de la cámara del Faraón, cerca del centro de la Pirámide, debía sostener el peso de todos los estratos de piedra superiores. Para evitar que el techo se hundiera bajo aquel peso, el Maestro construyó encima, para reducir la tensión, 5 cámaras una sobre otra separadas por lastras de granito de 50 toneladas. Con el paso de los siglos, las letras no han soportado la tensión, pero el techo de la cámara tumbal permanece intacto.

continúa en la página siguiente

19.—ECUACIONES EXPONENCIALES.

Sabemos que siempre se verifica:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Este hecho nos permite resolver las ecuaciones exponenciales llamadas así porque la incógnita se encuentra en el exponente.

Ejemplo:

Resolver la ecuación exponencial

$$2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$$

Solución

Como $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$

Pasando el denominador al numerador tenemos que

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

Sustituyendo en la ecuación la expresión anterior

$$2^{1-x^2} = 2^{-3}$$

Como las bases son iguales, los exponentes deben de ser iguales y tenemos

$$1 - x^2 = -3$$

pasando el 1 al segundo miembro

$$-x^2 = -3 - 1$$
$$-x^2 = -4$$
$$x^2 = +4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

19.1.—Sistema de ecuaciones exponenciales.

Se llama sistema de ecuaciones exponenciales al conjunto de dos o más ecuaciones exponenciales.

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2^x + 3^y &= 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Hacemos un cambio de variable y llamamos

$2^x = u$ y $3^y = v$, entonces nos queda

$$\begin{aligned} u + v &= 7 \\ u \cdot 2 - v \cdot 3 &= -1 \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema por reducción

$$\begin{array}{rr} 3u + 3v = & 21 \\ 2u - 3v = & -1 \\ \hline 5u & 20 \end{array}$$

$$u = \frac{20}{5} = 4$$

$$v = 7 - u = 7 - 4 = 3$$

Como teníamos

$$2^x = u \Rightarrow 2^x = 4 = 2^2 \qquad x = 2$$

$$3^y = v \Rightarrow 3^y = 3 = 3^1 \qquad y = 1$$

Ejemplo

Resolver la ecuación. $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

Solución

Hacemos un cambio de variable, llamando a $2^{x-4} = u$, entonces nos queda que $2^{x-3} = 2 \cdot u$; $2^{x-2} = 4 \cdot u$ y $2^{x-1} = 8 \cdot u$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$8 \cdot u + 4 \cdot u + 2 \cdot u + u = 960$$

$$15 \cdot u = 960$$

$$u = \frac{960}{15} = 64$$

viene de la página anterior

La Gran Muralla China, la mayor realización de los antiguos ingenieros, supera a la Pirámide de Keops en dimensiones pero no en ingeniosidad. Se inició en el siglo III a.J.C. por el primer emperador chino, Ch'in Shih Hwang Ti, para proteger su imperio de la invasión de los Hsiung-nu. La Muralla se extiende en la China septentrional durante 2.200 km. pero su longitud real es de 4.000 km. a causa de su forma contorsionada. Centenares de miles de hombres se emplearon para construir la estructura en tierra prensada, revestida después en su mayor parte de piedras o ladrillos. Algunas partes, bien conservadas, alcanzan 9 m. de altura y 4 m. de anchura en la cima. Sobre esta, recorre la Muralla una carretera pavimentada, protegida por parapetos y dominada de vez en cuando por torres cuadradas para la guardia.

Contemporáneamente a la construcción de esta línea de defensa en China, la ingeniería estaba muy desarrollada en Roma donde, durante siglos, los ingenieros hablan construido estructuras soberbias. Su técnica aprovechaba ampliamente los resultados obtenidos por griegos y otros pueblos.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Por ejemplo, obtuvieron vistosos éxitos utilizando una invención de Mesopotamia: el arco de medio punto. El arco, formado por piedras molduradas o por ladrillos y sostenidas a los lados de pesadas pilastras, distribuía el peso de la construcción superior tanto hacia los lados como hacia abajo; podían así realizarse aperturas mayores que no necesitan lastras grandes de piedra. Usando una sucesión de arcos de medio punto, los romanos atravesaban ríos y valles con puentes y acueductos tan sólidos que algunos son eficientes todavía.

A menudo los éxitos de la ingeniería del Medioevo son ignorados y, sin embargo, algunos superan en audacia aquello de los romanos. En este período, surgieron las catedrales góticas, monumentos al fervor religioso del hombre medieval. Con sus agujas lanzadas hacia el cielo, con sus naves espaciosas, sus bóvedas altísimas y frágiles muros ornamentados con ventanas veriopintas, las catedrales fueron milagros de una estática calculada con precisión.

continúa en la página siguiente

Y como a su vez $u = 2^{x-4}$, tenemos

$$64 = 2^{x-4}$$
$$2^6 = 2^{x-4}$$
$$6 = x - 4$$
$$10 = x$$

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y &= 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} &= 59 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Hacemos un cambio de variable, llamando a $2^x = u$ y $3^y = v$. Sustituyendo en el sistema

$$3 \cdot u - 5 \cdot v = 3$$
$$2 \cdot u + 3 \cdot v = 59$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción

$$\begin{aligned} 6u - 10v &= 6 \\ -6u - 9v &= -177 \\ \hline -19v &= -171 \end{aligned}$$

$$v = \frac{-171}{-19} = 9$$

$$3 \cdot u - 5 \cdot 9 = 3$$
$$3u - 45 = 3$$
$$3u = 48$$

$$u = \frac{48}{3} = 16$$

y como teníamos que

$$\left.\begin{aligned} 3^y &= v \qquad 3^y = 9 = 3^2 \\ 2^x &= u \qquad 2^x = 16 = 2^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Siendo $f: x \to x^2 + 2x - 1$, $g: x \to x^2$

expresar: $f(x + h)$; $f(x + h) - f(x)$;

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}; \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

Solución

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) - 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 1$$

$$f(x + h) - f(x) =$$

$$= (x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 1) - (x^2 + 2x - 1) =$$

$$= 2xh + h^2 + 2h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} = 2x + h + 2$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

2. Demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x + 7} = 1$$

Solución

$$\left|\frac{x+1}{x+7} - 1\right| < \epsilon \iff \left|\frac{x+1-x-7}{x+7}\right| < \epsilon \iff \left|\frac{-6}{x+7}\right| < \epsilon$$

$$\frac{6}{x + 7} < \epsilon \qquad x + 7 > \frac{6}{\epsilon}$$

Para $\epsilon = 0{,}01$ $\qquad x + 7 > 600 \qquad x > 503$

viene de la página anterior

Con su equilibrio basado en un juego de fuerzas contrapuestas, representan la más osada técnica de construcción en piedra jamás utilizada. Cada catedral era producto de una ingeniería empírica. Ya que no existían precedentes de estructuras tan airosas y audaces, más de una catedral se vino abajo durante su construcción y hubo de ser reconstruida. Pero de los fracasos se obtuvieron soluciones sublimes sobre el modo de combinar la altura y la longitud de las fachadas. Una solución fue el arco agudo que descarga el peso sobre pilastras más verticalmente que el arco de medio punto. Ello hizo posible levantar bóvedas, reforzadas por nerviaciones de piedra, a 30 m y más. Para sostener los muros en construcciones tan vastas para contener grandes multitudes, se añadió otro elemento: el contrafuerte. El contrafuerte era un semiarco que se apoyaba a la pilastra del arco para compensar el empuje hacia fuera ejercido por el peso, evitando así que los muros cediesen. El resultado fue una estructura gigantesca, sólida y sin embargo delicada, que exaltaba en su imponente realización el espíritu humano.

NEWTON

ESTA considerado Isacc Newton como el más grande matemático inglés. Nació en Woolsthorpe en 1642 y murió de mal de piedra, en Kensigton (Londres) en el año 1727, y fue enterrado en la abadía de Westminster, donde se le construyó en 1731 un mausoleo que lleva grabada la fórmula dada por Newton en 1663 para formar el desarrollo de una potencia cualquiera de un binomio.

Al cerrarse por la peste en Londres la universidad de Cambridge en 1655, ingresa Newton en Woolsthorpe realizando en esta época los descubrimientos fundamentales más sobresalientes, tales como el cálculo infinitesimal, la naturaleza de la luz blanca y la teoría de la gravitación universal. Sobre esta última escribe los «Principios matemáticos de filosofía natural» en que expone las leyes del choque, estudia la precesión de los equinocios, la teoría de las mareas... etc. Las maderas del manzano, debajo del cual estaba Newton cuando vio caer una manzana, se conservan en Inglaterra como pieza de museo.

continúa en la página siguiente

Cuando x vale más de 503, entonces

$\frac{x+1}{x+7}$ dista de 1 menos de una centésima.

y para $\forall \epsilon > 0$ podemos encontrar un x tal que a partir de él

$$\left| \frac{x+1}{x+7} - 1 \right| < \epsilon$$

3. Demostrar que $\lim_{x \to +1^-} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = -8$

Solución

Al sustituir el valor de $x = 1$ en la función tenemos

$$\frac{2-6+1+2}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación}$$

Intentamos resolverla dividiendo

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

al sustituir en la nueva función $x = 1$

$$2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 3 = -8$$

4. Estudiar la continuidad de la función:

$$x \xrightarrow{f} \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

En el punto de abcisa 1.

Solución

a) ¿Tiene límite?

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x + 1) = 2$$

Como los límites laterales existen y además coinciden

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

b) La función está definida ya que $f(1) = 2$

c) Como $\lim_{x \to 1} f(x)$ coincide con $f(1)$, la función es continua en el punto de abscisa 1.

5. Calcular los límites siguientes:

i) $F(x) = \dfrac{\text{senx } L(1 + x^2)}{x \,.\, \text{tagx}}$ cuando $x \to 0$

ii) $F(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}$ cuando $x \to 0$

iii) $F(x) = (\text{sen } x)^{\text{tagx}}$ cuando $x \to 0$

Solución

i) $F(x) = \dfrac{\text{senx} \,.\, L(1 + x^2)}{x \,.\, \text{tagx}}$, si $x \to 0$

$L(1 + x^2) \simeq x^2$; $\text{sen } x \simeq x$ $\quad$ $\text{tag } x \simeq x$ para $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim \frac{x \,.\, x^2}{x \,.\, x} = 0$$

ii) $F(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}^2 x}}$ si $x \to 0$ es de la forma 1^∞

$$\lim F(x) = e^{\lim LF(x)}$$

$$LF(x) = \frac{1}{\text{sen}^2 x} L \cos x \quad \text{si } x \to 0 \quad L \cos x \simeq \cos x - 1;$$

$$\text{sen}^2 x \simeq x^2$$

$$\lim F(x) = e^{\lim LF(x)} = e^{\lim 1/x^2 \,.\, (\cos x - 1)} =$$

$$= e^{\lim \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = e^{-1/2}$$

iii) $F(x) = (\text{sen } x)^{\text{tagx}}$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} F(x)$ es de la forma 0^0

$$\lim_{x \to 0} F(x) = e^{\lim_{x \to 0} L \,.\, F(x)}$$

$$LF(x) = \text{tagx} \,.\, L \,\text{senx} \quad \text{si } x \to 0 \quad \text{tag } x \simeq x \quad \text{sen } x \simeq x$$

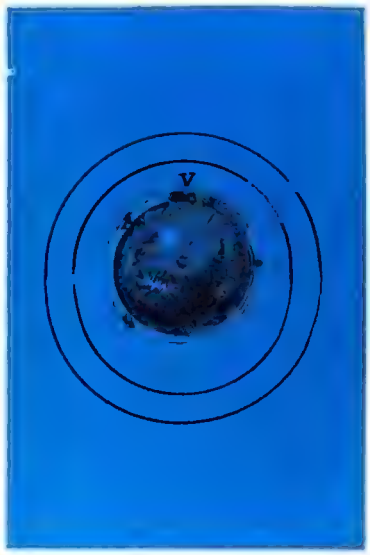
$$LF(x) \simeq x \,.\, Lx$$

$$\lim_{x \to 0} F(x) = e^{\lim_{x \to 0} x \,Lx} = e^0 = 1$$

6. Calcular los siguientes límites:

i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} - \text{cotg}^2 x$

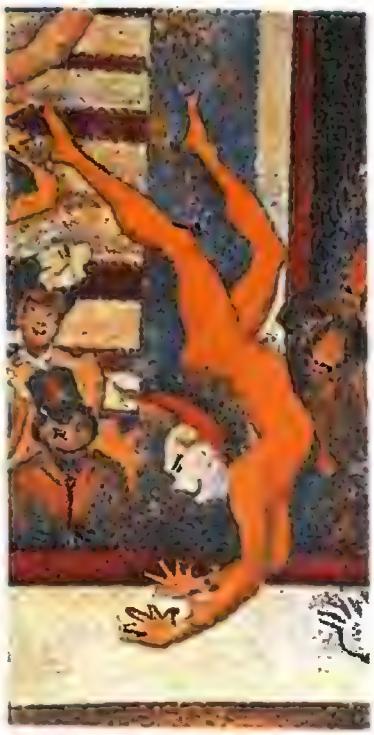
ii) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \text{tag } 2x \,.\, \text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



viene de la página anterior

Se construyó en 1671 su telescopio de espejo, y en el 1675, siendo miembro de la Sociedad real, da su explicación sobre los colores de los cuerpos y su teoría de las irisaciones producidas por las láminas delgadas conocidas por el nombre de «Anillos de Newton»; sus «Principios» han fijado los métodos de la ciencia moderna. Creó, también, métodos de extracción de raíces de algunas ecuaciones. En el año 1707 publicó una «Aritmética universal» y un «Tratado sobre la cuadratura de las curvas», lo que originó muchas controversias y polémicas con los partidarios de Leibniz, inventor, también, del cálculo infinitesimal.

En 1703 fue nombrado Presidente de la Royal Society y la Reina le concedió el título de Baronet.



El surrealismo arranca del 1917 cuando Apollinaire montó su obra teatral "Les mamelles de Rirésias" y desde entonces creció y evolucionó luchando contra todos los moldes estéticos y sociales llegando a actitudes anormales y absurdas como devorar arañas vivas o dar conferencias en la Sorbona con un pie metido dentro de un cubo lleno de leche.

Este movimiento abarcó todas las disciplinas del arte y contó con hombres tan importantes como Duchamp, Ernst inventor de los "collages", Picabia, De Chirice, Picasso, Dalí o Luis Buñuel.

En su juego con lo absurdo, lo mágico, lo subconsciente creaban un arte intranquilo azaroso y sorprendente. Su devoción por el azar nos lleva a crear un juego humorístico llamado "el cadaver exquisito" que consiste en que cada uno de los participantes escriba en una hoja la primera palabra de una frase y la pase al compañero de su izquierda, por su parte, recibirá la del vecino de la derecha y anotará otra palabra construyendo así frases sorprendentes como la primera que se obtuvo y que dio su nombre al juego: "el cadáver exquisito beberá el vino nuevo".

Otra modalidad del juego era que cada uno realizara una parte de un dibujo obteniendo resultados sorprendentes.

Solución

i) Desarrollando en serie

$$\cotg^2 x = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4^2} + \ldots\right)^2 \text{ queda}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cotg^2 x\right) =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4^2} + \ldots\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{3x} - \frac{2x^2}{4^2 x} + \ldots\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} + \frac{x}{2!} + 0(x) = \frac{2}{3}.$$

ii) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tag} 2x \cdot \cotg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tag}(x + x)}{\operatorname{tag}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2\operatorname{tag} x}{1 - \operatorname{tag}^2 x}}{\frac{\operatorname{tag} x + \operatorname{tag} \pi/4}{1 - \operatorname{tag} x \cdot \operatorname{tag} \pi/4}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tag} x}{(1 + \operatorname{tag} x)^2} = \frac{1}{2}$$

7. Calcular $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

Solución

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} \qquad Ly = \frac{1}{x}(-Lx)$$

$$\lim_{x\to +\infty} Ly = -\lim_{x\to \infty} \frac{Lx}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to \infty} \left[\frac{Lx - L(x-1)}{x - (x-1)}\right] = -\lim_{x\to +\infty} \frac{L\frac{x}{x-1}}{1} = -L1 = 0$$

$$\text{luego } \lim_{x\to \infty} y = e^0 = 1$$

8. Sea f: R — {0} → R definida por f(x) = x E (1/x) donde E(1/x) designa el menor número entero mayor o igual que 1/x. Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Solución:

$$[1]\ \left|f(x) - 1\right| = \left|x\ E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x}\right| =$$

$$\left|x\left(E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|x\right|\left|E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\delta\right|\left|E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right|$$

Observemos que $E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} > 0$. Así pues $\left|E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right| = E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$

Además $E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 1$. En efecto, supongamos $E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 1 + \alpha$ (con $\alpha \in R^+$). Tendriamos:

$$K - \frac{1}{x} = 1 + \alpha \qquad (K \in Z)$$

$(K - 1) - \frac{1}{x} = \alpha$ y K no sería el menor entero mayor o igual que $\frac{1}{x}$, luego $E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 1$

De [1] se deduce en consecuencia:

$$[1]:\ f(x) - 1 \leq \delta \leq \epsilon \text{ con } x \leq \delta$$

Así pues dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon$.

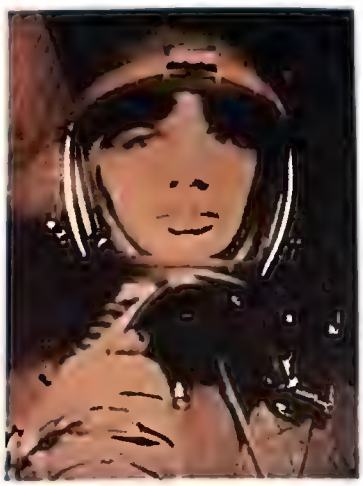
9. Hallar el límite cuando x tiende a cero de $y = [L(\sec x)]^{\frac{x}{e^x}}$

Solución:

Es una expresión de la forma 0^0. Tomando logarítmos aplicando reiteradamente la regla de L'Hôpital y teniendo en cuenta que x y tgx son infinitésimos equivalentes:

$$Ly = \frac{x}{e^x} L[L(\sec x)] = \frac{1}{e^x} \frac{L[L(\sec x)]}{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} \cdot \lim \frac{L[L(\sec x)]}{1/x} =$$



La conquista del espacio no sólo conlleva un gran avance en la búsqueda de combustibles, materiales y nueva tecnología, sino que el protagonista de dicha aventura merece una atención especial.

Desde que el 12 de abril de 1961 Yuri Gagarin realizó su primer vuelo orbital se apreció aún más la necesidad de contar con una medicina espacial.

Los astronautas deben someterse a condiciones especiales como son la modificación de la gravedad, que pasa desde una aceleración de g = 9,8 m/s a valores de 0g ó 7g.

La ausencia completa de gravedad g = 0 se produce durante el vuelo orbital y tan antinatural situación si es continuada conlleva un stress y una sobrefatiga que limita la adaptación del hombre ante otras modificaciones.

Durante las fases de aceleración y deceleración se alcanzan los valores próximos a 7g lo que supone aumentar nuestro peso 7 veces de modo que el peso específico de la sangre es casi igual al del nuevo líquido. A pesar de que parezca sorprendente el cuerpo humano puede soportar brevemente hasta 20g.

El problema de la ausencia de gravedad se resolvería con un sistema radial, así una nave de 10m de radio que girara completamente en 10g bastaría para generar una gravedad similar a la terrestre. Este modelo fue tratado con gran cuidado científico por Stanley Kubrick en su película 2001: una odisea del espacio.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{L(\sec x)} \cos x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}{-1/x^2} =$$

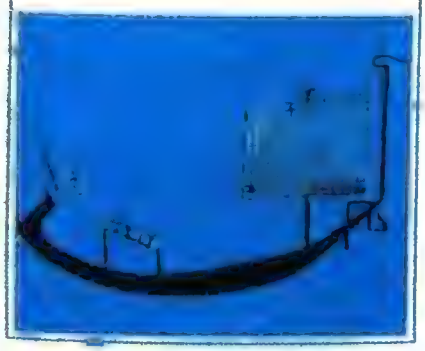
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 \operatorname{tg} x}{L(\sec x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{tg} x}{x}}{\frac{L(\sec x)}{x^3}} \cdot \frac{1}{1} =$$

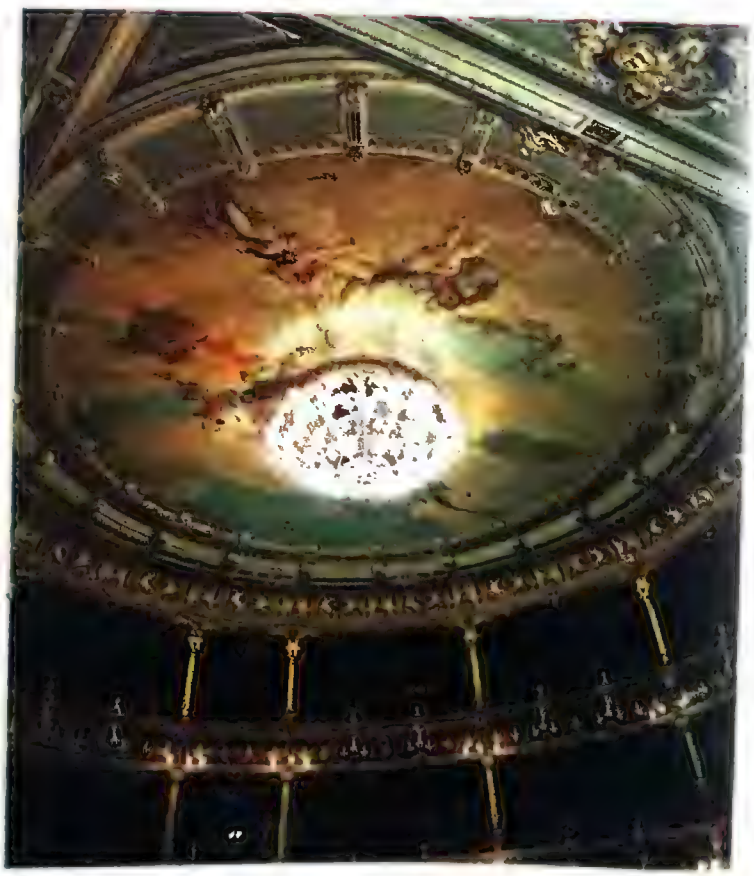
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\frac{L(\sec x)}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x} = 0 \qquad \text{luego, } \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

Las primeras raferencias históricas acerca de la navegación llegan del antiguo y legendario Egipto donde se utulizaban navios más parecidos a balsas da notables dimensiones que datan alrededor del 4000.A.C. tras esta referencia no se conocen demasiado las naves empleadas por los cretenses que alrededor del 1500 a. C. se constituyan en importante potencia naval. Con el paso del tiempo se evolucionó en la construcción y así los fenicios incorporan el espolón de proa y dos niveles diferantes en la situación da los remos, y ya con griegos y romanos el nivel tácnico era elevado. Se construyen navíos con quilla popa proa y armazón internos, y compaginando remos y vela; las velas fueron en su comienzo cuadradas o rectacgulares y aunque los egipcios habían utilizado la vela triangular de vértice dirigido hacia abajo hasta el siglo II a.C. y hasta el siglo XIII se generalizó en al Mediterráneo ei uso de la vela latina triangular y con la base horizontal cuya difusión es obra de los árabes.

Así pues y al margen del desarrollo naval del Norte de Europa en el Mediterráneo se podía encontrar una nave característica con dos palos, vela latina, y un casco que no presentaba novedades.





TEMA 37

DERIVADAS

INDICE

1.—DERIVÀDA DE UNA FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL EN UN PUNTO.
2.—FUNCION DERIVADA DE UNA FUNCION REAL.
3.—INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA.
4.—PROPIEDADES DE LA DERIVACION DE FUNCIONES.
4.1.—Continuidad.
4.2.—Operaciones.
5.—CALCULO DE DERIVADAS.
5.1.—Derivada de una función constante.
5.2.—Derivada de la función idéntica.
5.3.—Derivada de la función x^2.
5.4.—Derivada de la función x^3.
5.5.—Derivada de la función $y = x^n$
5.6.—Derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^n}$.
5.7.—Derivada del cociente de dos funciones.
5.8.—Derivada de un polinomio.
5.9.—Derivada de la función logaritmica.
5.10.—Derivada de la función exponencial.

TEMA 37

CONTINUACION

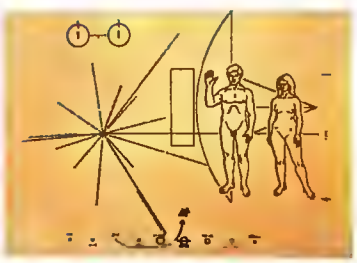
6.—DERIVADA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.
- 6.1.—Derivada de la función seno.
- 6.2.—Derivada de la función coseno.
- 6.3.—Derivada de la función tangente.
- 6.4.—Derivada de la función cotangente.
- 6.5.—Derivada de la función secante.
- 6.6.—Derivada de la función cosecante.

7.—DERIVACION DE FUNCIONES INVERSAS. APLICACIONES.
- 7.1.—Derivada de la función inversa del seno.
- 7.2.—Derivada de la función inversa del coseno.
- 7.3.—Derivada de la función inversa de la tangente.
- 7.4.—Derivada de la función inversa de la cotangente.

8.—COMPOSICION DE FUNCIONES Y DERIVACION.
9.—APLICACIONES FISICAS DE LA DERIVADA.
10.—CUADRO RESUMEN DE DERIVADAS.
11.—DERIVADAS SUCESIVAS.
- 11.1.—Fórmula de Leibnitz.

12.—TEOREMA DE ROLLE.
13.—TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS.
14.—FORMULA DE CAUCHY.
15.—EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 37



La nave Pioner 10 fué lenzada con destino a Jupiter en marzo de 1972 y después de atravesar con éxito la extensa zona de los asteroides que se sitúa entre Marte y Jupiter, el 4 de diciembre de 1973 se situó a 130.000 km. de Júpiter enviando interesante información acerca del campo magnético, del gigentesco planeta.

Fue precisamente el campo gravitatorio el que empujó al Pioner 10 fuera del sistema solar en diciembre de 1973 de forma que ahora continúa en órbita en la galaxia.

Además del servicio realizado al desarrollo científico el Pioner tiene otra misión encomendada como mensajero de nuestro planeta. Sobre el Pioner se colocó una placa de aluminio dorado donde aparece impreso un esquema del sistema solar y catorce púlsares, que permitirán localizar nuestro sistema solar a posibles seres inteligentes, y un dibujo de dos seres humanos tipo: un hombre y una mujer. El mensaje está en el espacio, quién sabe si será recogido e interpretado, sólo resta esperar.

DERIVACION

1.—DERIVADA DE UNA FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL EN UN PUNTO.

Una función f de $A \to R$ siendo A un intervalo de R se dice derivable en un punto $a \in A$ si existe el límite en R.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El límite cuando existe se llama derivada de la función f en el punto a y se indica por f'(a).

La consideración de los límites laterales en $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ permite definir las derivadas a derecha o izquierda de una función en un punto de su campo de definición.

Una función f definida en un intervalo $A \subset R$ se dice derivable a la derecha, en un punto $a \in A$ cuando existe:

$$\lim_{x \to a^+} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

Una función f *se dice derivable* a la izquierda si existe:

$$\lim_{x \to a^-} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

Chile posee a unos 3700 Km. de la costa del Pacífico un trozo de tierra: la isla de Pascua.

Los indígenas la llamen "ombligo del mundo". De este antiguo origen perduran numerosos monumentos de piedra, los moai, erigidos por los indígenas. Las estatuas tienen un peso de unas 10 a 100 Tm. siendo un misterio el sistema que emplearon para ponerlas en pie, una vez esculpidas.

Es la exposición de un arte nacido hace 2000 años a cargo de unos hombres que no conocían el hierro y que conseguían el cuchillo y el escoplo a través de las rocas volcánicas que constituyen la isla. Aquellas cabezes de más de 10 metros de altura son el exponente de una civilización, ya desaparecida, sobre la que investigan arqueólogos y etnólogos. Es un misterio...

Parece que fueron esculpidas en la misma roca y trasladadas después hasta el lugar definitivo. La leyenda explica que por medio de brujerías las enormes figuras adquirieron el don de poder desplazarse por sí mismas hasta que por enojo de la autora del encantamiento quedaron privadas de movimiento y paralizadas en la mismo posición que tenían en aquel instante.

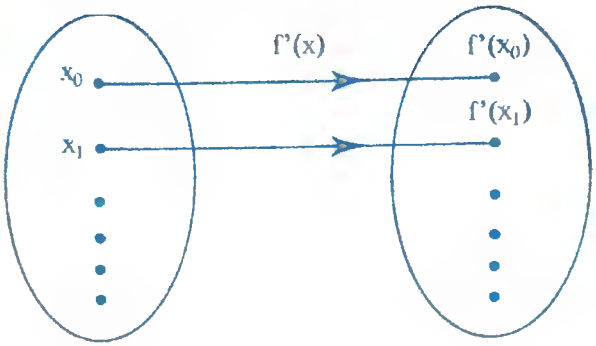
Esto naturalmente no es una solución científica, pero es el único modo de explicar este atrayente enigma.

Hoy en día, la isla de Pacua sigue siendo un sueño con sus misterios y sus pintures en el interior de las cavernas.

Una función *derivable* en un punto es derivable, simultáneamente, por *la derecha y por la izquierda en dicho punto y los dos límites, derivadas a la derecha e izquierda, coinciden.*

2.—FUNCION DERIVADA DE UNA FUNCION REAL.

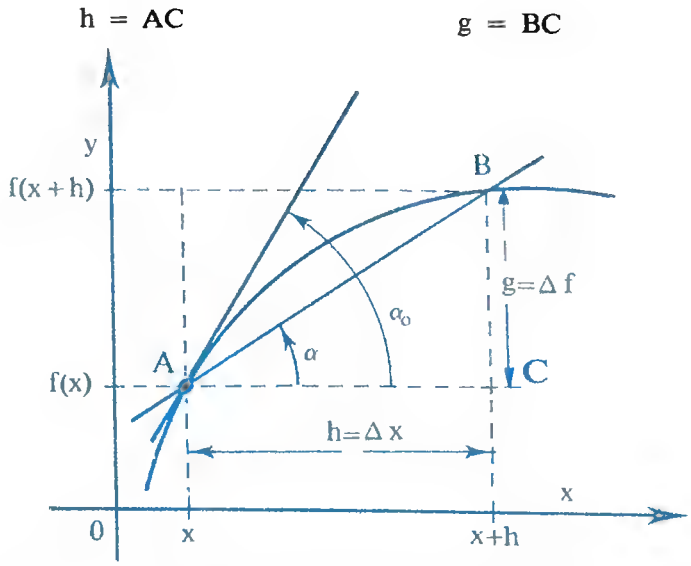
La función derivada es la que resulta de asociar a cada punto el valor de la derivada en ese punto.



$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

3.—INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Si tenemos una curva cuya representación gráfica es la de la figura, en ella tenemos un punto, A, de abcisa x, y otro punto B de abcisa (x + h). Según vemos:



cuando h tiende a cero, B se desplaza hasta A y el ángulo α tiende a α_0. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{B \to A} \frac{BC}{AC} = \lim_{\alpha \to \alpha_0} tg\alpha = tg\alpha_0$$

la tangente a una curva en uno de sus puntos coincide con la derivada de la función en ese punto.

4.—PROPIEDADES DE LA DERIVACION DE FUNCIONES

En primer lugar hay que hacer referencia a la continuidad.

4.1.—Continuidad.

1. Toda función derivable con derivada finita en un punto es continua en dicho punto.

En efecto sabemos que $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

y por tanto para todo $\epsilon > 0, \exists\ \delta$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \epsilon, \qquad \text{para} |x - a| < \delta$$

esto es: $$|f'(a)| - \epsilon < \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} < |f'(a)| + \epsilon = K$$

$f(x) - f(a) < (f'(a) + \epsilon)(x - a)$ y como $f'(a) + \epsilon$ es finito $= K$.

luego $|f(x) - f(a)| < K \cdot |x - a|$, para $|x - a| < \delta$

que implica la continuidad de $f(x)$ en $x = a$

Asimismo si una función tiene derivada finita a la derecha en un punto, entonces es continua a la derecha, si existe la derivada a la izquierda y es finita la función es continua a la izquierda.

Las demostraciones son análogas y se dejan para el lector.

4.2.—Operaciones.

2. Si dos funciones f, g son derivables en un punto a entonces también son derivables en a las funciones f + g, f . g, λ f (para todo λ real) y si f(a) ≠ o 1/f

La suma f+g tendrá como derivada en a, cuando exista:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \quad f'(a) + g'(a)$$

En cuanto al producto f . g

$$h(x) = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

sumando y restando f(a) . g(x) en el numerador.

$$= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= g(x) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

LEIBNIZ

GUILLERMO Leibniz nació en Leipzig, Alemania, en el año 1646 y fue un gran filósofo y matemático.

A los 15 años dominaba las lenguas clásicas, a los 17 presentó una tesis sobre «El principio endivisuación». Consiguió el grado de doctor en Altfof a los 20 años con la tesis «De casibus perpleseis in inre».

Entró al servicio del elector de Maguncia, lo que le introdujo en la política y la diplomacia. Destacan en esta época distintos libros: «Tratado sobre la elección de los reyes en Polonia», «Confesión de la naturaleza contra los ateos» sobre política, y sobre metemática y mecánica «Teoría del movimiento abstracto y teoría del movimiento concreto».

En París, donde fue en misión diplomática, conoció a las personas más destacadas de su época. Ideó el cálculo infinitesimal a finales de 1676 que no publicó hasta después.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

El duque de Bruswich-Luneburgo, residente en Hannover, nombró a Leibniz consejero y bibliotecario, por lo que éste se trasladó allí a finales de 1676 y permaneció al servicio de dicho señor hasta su muerte ocurrida en el año 1716. Quiso unir la Iglesia católica y la protestante. Propuso a Pedro el Grande introducir en Rusia la cultura occidental.

El más importante descubrimiento científico de Leibniz fue el cálculo infinitesimal, que formuló al tiempo que Newton, pero su notación ha quedado prevalente a la de Newton, por ser más práctica.

Escribió muchos libros sobre filosofía y matemáticas, como su «Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas» que le hizo romper con Descartes. Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano: «Ensayos de Teodicea», donde explica su tesis sobre el optimismo. En la «Monadología» estudia el problema que se refiere al ser.

Tuvo muchísimos discípulos, influyendo de manera importante en Balmes, y sus obras aún no se han publicado completamente.

luego si existen f'(a) y g'(a), por la continuidad de g(x) en el punto a tendremos tomando límites.

$$\lim_{x\to a} h(x) = \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\left(\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) +$$

$$+ f(a)\left(\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) = g(a)\, f'(a) + f(a)\, g'(a)$$

Para λf la derivada será $\lambda f'(a)$ y la demostración es inmediata. y se deja como ejercicio al lector

Las funciones derivables en un punto *a* forman así un álgebra-subálgebra del álgebra de funciones continuas en el punto a—.

En general, si en un intervalo $A \subset R$ las funciones f, g son derivables, las funciones $f + g$, $f \cdot g$, λf —con λ real fijo— son derivables en A;

Las funciones derivadas cumplen:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x); \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

como consecuencia $(f(x))^n$ es derivable y $[f(x)^n]' = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$

Función $\frac{1}{f}$. Si $f(a) \neq 0$, por la continuidad de f(x) en a existe un intervalo $x - a < \delta$ en el que $f(x) \neq 0$ y por tanto

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(a) - f(x)}{f(x).f(a)(x-a)}\right] =$$

$$= \frac{1}{f(a)} \cdot \left(\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(x)}{x - a}\right) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

ya que: $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)}$ $\qquad \lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(x)}{x - a} = -f'(a)$

Si f(x) es derivable en el intervalo $A \subset R$ y $o \notin f(A)$, entonces $\frac{1}{f}$ es derivable en A y $\left(\frac{1}{f}(x)\right)' = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

5.—CALCULO DE DERIVADAS.

5.1.—Derivada de una función constante.

Si tenemos $f(x) = C$ su derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = 0$$

la derivada de una función constante es igual a cero

De lo anterior se deduce que dos funciones que tienen la misma derivada se diferencian únicamente en una constante.

5.2.—Derivada de la función idéntica.

Sea una función $f(x) = x$, su derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim \frac{x+h-x}{h} = 1$$

la derivada de la función idéntica es siempre igual a 1.

5.3.—Derivada de la función x^2.

Si $f(x) = x^2$, su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

la derivada de la función x^2 es igual al exponente por la variable independiente.

5.4.—Derivada de la función x^3.

si $f(x) = x^3$, su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + h^3 + 3x^2h + 3h^2 - x^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (h^2 + 3x^2 + 3hx) = 3x^2$$

la derivada de la función x^3 es igual al exponente por la variable independiente elevada al exponente menos uno.

5.5.—Derivada de la función $y = x^n$

Como generalización de los casos anteriores la derivada de una función potencial es igual al exponente multiplicado por la variable independiente elevada al mismo exponente disminuido en una unidad.

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

5.6.—Derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^n}$

Podemos decir que $f(x) = x^{n/2}$ y desarrollándolo como derivada de una función potencial:

$$f'(x) = \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}-1} = \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^n}}$$

JUAN NEPER

JUAN Neper nació en Edimburgo en 1550 de familia noble, fue un acomodado terrateniente, tenía el título de barón de Merchiston, y vivió casi toda su vida en el hermoso castillo de Gartnes, lugar pintoresco y tranquilo de Escocia donde dedicabe todos sus ratos de ocio al estudio de los números.

Su principal descubrimiento fue la invención de los logeritmos vulgares o neperianos en el año de 1614.

Creó la tabla de logaritmos que lleva su nombre, desarrollando le teoría fundamental de los mismos.

Su obra «Rabdologie seu Numerationis» puede considerarse como uno de los libros que más han influido en el cálculo aritmético y trigonométrico, y en ella se sientan algunos principios que hoy día se emplean para construir diversas máquinas calculadoras.

Murió en el año 1617 habiendo dejado un procedimiento práctico para simplificar los cálculos, basándose en una correspondencia entre dos series, una geométrica y otra arimética.

Las matemáticas son instrumento fundamental para todas las ciencias experimentales e incluso sociales, por ello, cuando se afronta la colonización de un territorio las matemáticas toman un caracter especial y se ponen al servicio de las colonias

Esto resulte evidente si consideramos que la mayor parte de los libros de aritmética publicados en América antes del siglo XIX se dediquen a operaciones comerciales, minería, valores en oro y plata, conversión de moneda, etc.

Juan Díez en 1556 estudia estas cuestiones en su obra «Sumario compendioso de las quentas», así como Juan de Belveder «Libro general de las reducciones de plata y oro» en 1597 y Güarreguilla en 1607 con «Libro de la plata reducida». El nivel del algebra en esta obra es comparable al europeo en la misma época.

Se realizaron también adaptaciones de obras anteriores como la obra de Pedro Paz, contable de la catedral de México, «Arte para aprender toda la aritmética, sin maestro» y la publicada en 1649 por Reaton: Arte menor de aritmética.

La más completa obra de aritmética se debe a Padilla e incluye el estudio de fracciones decimales.

continúa en la página siguiente

5.7.—Derivada del cociente de dos funciones.

Si f(x) es una función derivable y j(x) es otra función derivable, $\frac{f(x)}{j(x)}$ también es derivable.

$$\left(\frac{f}{j}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{j}\right)' = f \cdot \left(\frac{1}{j}\right)' + \frac{1}{j} \cdot f' =$$

$$= f\left(-\frac{j'}{j^2}\right) + \frac{f'}{j} =$$

$$= \frac{-fj' + f'j}{j^2} = \frac{f'j - fj'}{j^2}$$

la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador y todo ello dividido por el denominador al cuadrado.

Ejemplo:

Calcular la derivada de:

$$f(x) = \frac{7}{x^3 - 3}$$

Solución

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 3) \cdot 0 - 7(3x^2)}{(x^3 - 3)^2} = \frac{-21x^2}{(x^3 - 3)^2}$$

5.8.—Derivada de un polinomio.

La derivada de un polinomio es igual a la suma de las derivadas de cada uno de sus términos.

Ejemplo:

Calcular la derivada del polinomio:

$$y = 5x^7 + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 5$$

Solución

$$y' = 35x^6 + 15x^4 - 20x^3 + 6x^2 - 16x$$

5.9.—Derivada de la función logaritmica.

La derivada del logaritmo de una función es igual a la derivada de la función dividido por la función y multiplicado por el logaritmo en base a del número *e*.

Si tenemos $f(x) = \lg_a x$ para hallar su derivada aplicamos la definición de derivada y obtendrémos que:

$$f(x) = \lg_a x$$

luego

$$\lim_{x \to a} \frac{\lg_a x - \lg_a a}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{\lg_a \frac{a+h}{a}}{h} =$$

siendo $x = a + h$

$$= \lg_a \left[\lim_{h \to 0} (1 + \frac{h}{a})^{1/h}\right] = \lg_a e^{1/a} = \frac{1}{a} \lg_a e$$

Si la función es derivable en todo punto:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lg_a e$$

La derivada del logaritmo en base a de x, es igual a 1/x multiplicado por el logaritmo en base a del número, e.

En general si tenemos:

$$f(x) = \log_a u(x)$$

aplicando la derivación de función de función:

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(u) = \frac{1}{u} \lg_a e$$

y como

$$u'(x) = u'$$

$$\text{luego} \quad f'(x) = \frac{1}{u} \lg_a e \cdot u' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de $f(x) = \lg\sqrt{x}$

viene de la página anterior

La difusión de las matemáticas en le Américe colonial española se debe en gran parte a las Universidades, escuelas militares y de minas.

La universidad de México fue fundada en 1637 y desarrolló allí su tarea Diego Rodríguez estudiando acerca del cometa de 1652 y manteniendo una importante correspondencia con importantes personajes europeos.

El más importante catedrático de matemáticas de esta universidad fue Carlos de Sigüenza y Góngora estudioso del cometa de 1680 en relación con el cuál mantuvo una seria polémica con un jesuita austriaco defendiendo que los cometas no afecteban en nada a los acontecimientos.

Pero en el ocaso del siglo XVIII las matemáticas y su enseñanza pasaron a tener más fuerza en la Escuela de Minas que en la Universidad y comenzaron a desarrollar nociones del cálculo infinitesimal.

En la Universidad de Lima se publicó un trabajo sobre la aplicación del cubo en 1696 que es uno de los libros que configuran la pobre aportación a la geometría.

Al matemático Juan de Palermo se atribuyen tres problemas curiosos uno de los cuales es un problema indeterminado de primer grado que se enuncia:

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Tres hombres tienen un capital en común en la proporción 1/2, 1/3, 1/6. Cada uno toma al azar una parte del capital y apartan de esa parte respectivamente 1/2, 1/3, 1/6 que juntan y dividen en tres partes iguales. Cada una de estas partes, agregada al sobrante de la cantidad tomada al azar, dá a cada personal el capital inicial propio ¿Qué parte tomó cada uno? Leonardo Pisano (Fibonacci) eligió para resolver este problema como nuava incógnita las partes iguales en que se ha dividido la reunión da las fraciones de las cantidades tomadas al azar.

Si la incógnita es u y el capital total s la parte sobrante de cada uno es:

$$\frac{1}{2}s - u,\ \frac{1}{3}s - u,\ \frac{1}{6}s - u$$

que son respectivamente 1/2, 1/3, 1/6, 2/3 y 5/6 de las cantidades tomadas al azar, que al mismo tiempo suman s de donde:

$$S = 2\left(\frac{1}{2}s - u\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}s - u\right) + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}s - u\right)$$

resolviendo nos queda $7s = 47u$ y haciendo $u = 7$ tenemos $s = 47$ con lo que las partes tomadas al azar resultan 33, 13, 1.

Solución

$$f(x) = \lg\sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \lg e = \frac{1}{2x} \lg e$$

Ejemplo

Si $f(x) = \log (3x^5 + 4x^2 - 2)$, hallar su derivada.

Solución

$$f'(x) = \frac{15x^4 + 8x}{(3x^5 + 4x^2 - 2)} \cdot \log e$$

DERIVADA DEL LOGARITMO NEPERIANO DE UNA FUNCION

Si tenemos $f(x) = L\ (u)$, su derivada sería:

$$f'(x)' = \frac{u'}{u} \cdot L\ e$$

pero como $L\ e = 1$ nos queda que:

$$f'(x) = \frac{u'}{u}$$

la derivada del logaritmo neperiano de una función es igual a la derivada de la función partida por la función sin derivar.

APLICACIONES DE LA DERIVADA LOGARITMICA

Se puede hallar la derivada de una función de una forma sencilla tomando previamente logaritmos neperianos y derivando. Así si

$$y = f(x)$$

tomando logaritmo neperiano en los dos miembros:

$$y = l\ f(x)$$

derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

despejando y',

$$y' = \frac{f'(x) \cdot y}{f(x)}$$

Ejemplo

Calcular mediante derivación logarítmica la derivada de la función:

$$y = \frac{3x^2 - 5}{5x + 1}$$

Solución

Tomamos logaritmos neperianos:

$$L\ y = L\ \left(\frac{3x^2 - 5}{5x + 1}\right)$$

derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\dfrac{6x(5x + 1) - 5(3x^2 - 5)}{(5x + 1)^2}}{\dfrac{3x^2 - 5}{(5x + 1)}} =$$

$$= \frac{30x^2 + 6x - 15x^2 + 25}{(3x^2 - 5)(5x + 1)} = \frac{15x^2 + 6x + 25}{15x^3 + 3x^2 - 25x + 5}$$

Despejando y'

$$y' = \left(\frac{3x^2 - 5}{5x + 1}\right) \cdot \frac{15x^2 + 6x + 25}{15x^3 + 3x^2 - 25x + 5}$$

$$y' = \frac{45x^4 + 18x^3 + 75x^2 - 75x^2 - 30x - 125}{75x^4 + 15x^3 - 125x^2 + 25x + 15x^3 + 3x^2 - 25x + 5} =$$

$$= \frac{45x^4 + 18x^3 - 30x - 125}{75x^4 + 30x^3 - 122x^2 + 5}$$

5.10.—Derivada de la función exponencial.

Podemos distinguir 4 casos:

a) $y = a^u$ siendo a = cte

Tomando logarítmos neperianos:

$$L\ y = L\ a^u = u\ L\ a$$

La geriatría es la disciplina médica encargada del estudio del proceso del en ejecimiento y las manifestaciónes patológicas que le acompañan.

La vejez se manifiesta por una serie de procesos físicos como endurecimiento de las arterias, pérdidas de flexibilidad muscular, encanecimiento del cabello, fragilidad y manchas en la piel y pérdida de estatura.

En lo que respecta a las facultades intelectuales no siempre se puede considerar que la vejez conlleve su decadencia aunque en general se ralentizan los procesos mentales y las sensaciones y percepciones se debilitan.

En edades avanzadas la concentración y la atención requieren más esfuerzo, la imaginación aparece mermada y las ideas y palabras no fluyen con tanta facilidad, en cuanto a la memoria es necesario distinguir que recuerdan con facilidad hechos del pasado ya lejano pero olvidan los acontecimientos más recientes.

La vejez coincide con la edad de jubilación, lo que suponen un auténtico problema para algunas personas que se sienten marginadas o algunas que llegan a pasar sus últimos días en la miseria o bien carentes de apoyo moral.

La quinina es un eficacísimo remedio contra las terribles fiebres y enfermedades que afectan a los habitantes de las zònas tropicales y ecuatoriales de la Tierra. Gracias a su intervención el hombre ha podido acometer grandes empresas de colonización y mejora en estas regiones y obras como el Canal de Suez o la colonización de Africa son inconcebibles sin su aportación.

La quinina era ya conocida de antiguo por los pueblos de la América precolombina y su descubrimiento por parte de los europeos conlleva una hermosa historia. Cuenta dicho relato que los indios americanos, en represalia por los malos tratos recibidos de los españoles, hicieron juramento solemne de no revelar el secreto de lo que llamaban el "árbol de la salud". Pero en 1638, la entonces virreina, Condesa de Chinchón, enfermó con fiebres tercianas al igual que su doncella, india Zuma que tras sanar gracias a la quinina, lealmente, suministró a su señora. Zuma fue sorprendida, se la acusó de intentar envenenar a la Condesa y fue condenada junto con su esposo. La virreina, defendiendo la inocencia de Zuma, suspendió la sentencia, y los indios, en señal de agradecimiento, revelaron su preciado secreto. La Condesa de Chinchón envió polvos de quinina a España y se generalizó su uso por todo el mundo.

Linneo, ilustre naturalista, al estudiar esta especie decidió bautizarla como Chinchona en honor a de la Condesa de Chinchón. Actualmente se la designa con el nombre de Cinchona.

Derivando:

$$\frac{y'}{y} = u' \, La$$

entonces: $y' = u' \, . \, La \, . \, y = u' \, La \, . \, a^u$

la derivada de la función exponencial.Es igual a la misma función exponencial multiplicada por la derivada del exponente y por el logaritmo neperiano de la base.

Ejemplo

Hallar la derivada de $y = 4^{x^3+2}$

Solución

$$y' = 4^{x^3+2} \; L \; 4 \cdot 3x^2$$

b) $y = e^u$

Ejemplo

Hallar la deriada de $y = e^{8x^4}$

Solución

$$y' = e^{8x^4} \, . \, 32x^3$$

c) $y = e^x$

Aplicando la regla anterior:

$$y' = e^x$$

este es el *único caso* en el cual la derivada y la función coinciden.

d) $y = u^v$

tomando logaritmos neperianos:

$$Ln \; y = \; Lu^v = v \; Lu$$

derivando

$$\frac{y'}{y} = v' \; Lu + \frac{u'}{u} \, . \, v$$

Despejando y':

$$y' = [v' \; Lu + \frac{u'}{u} \, . \, v] \, u^v$$

$$y' = v'u^v \; Lu + u^{v-1} \, v \, . \, u'$$

la derivada de la función exponencial y potencial es igual a la suma de los resultados que se obtienen al derivarla como exponencial y como potencial.

Ejemplo

Calcular la derivada de

$$y = (3x - 2)^{5x^2+7}$$

Solución

Tomando logaritmos neperianos:

$$L\, y = L(3x - 2)^{5x^2+7} = (5x^2 + 7)\, L(3x-2)$$

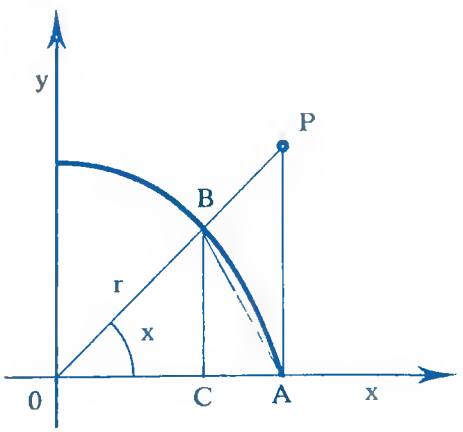
derivando:

$$\frac{y'}{y} = 10x \cdot L(3x - 2) + \left(\frac{3}{3x - 2}\right) \cdot (5x^2 + 7)$$

$$y' = (3x - 2)^{5x^2+7} \left[10x\, L(3x - 2) + \frac{15x^2 + 21}{3x - 2}\right],$$

6.—DERIVADA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

Previamente vamos a averiguar el límite de la razón del seno de un arco a su arco cuando este último tiende a cero, o sea:



$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \qquad OA = 1$$

El área del triángulo OAB es menor que el área del sector OAB y éste a la vez menor que el área del triángulo OAP

$$S\,\widehat{OAB} < S(OAB) < S\,\widehat{OAP}$$

La capital federal de la República Argentina a orillas del Río de la Plata es una magnífica ciudad que tiene su origen en el asentamiento español fundada por el adelantado Pedro de Mendoza el 3 de febrero de 1536 con el nombre de Santa María del Buen Aire.

Pero la supervivencia era difícil por la hostilidad de los indios de modo que la población fue trasladada a Nuestra Señora de la Asunción fundada en agosto de 1537 y Pedro de Mendoza, murió en la travesía de regreso a España en ese mismo año.

La colonización siguió creciendo y dada la importancia de la situación geográfica de Buenos Aires, Juan de Garay reemprendió la fundación de la ciudad, esta vez definitivamente, el 11 de junio de 1580.

Esta fundación dio paso al brillante crecimiento de una moderna ciudad industrializada y de gran corrección urbanística donde se concentra una gran parte de la actividad comercial y cultural en el área hispana de Sudamérica.

Geográficamente es el núcleo de una amplia zona, el Gran Buenos Aires que comprende más de 3000 km^2 de superficie, lo que constituye la mas importante aglomeración urbana de América del Sur.

Su monumentalismo, sus rincones típicos, sus avenidas y el encanto de sus gentes la convierten en inolvidable para quienes la conocen y aumenta el interés de sus visitantes.

La estomatología es la acepción más moderna que hace referencia a la odontología y, que es a su vez, la especialidad médica que se encarga de la patología bucal tanto de las piezas dentarias como de todo proceso que tenga el mismo escenario.

La odonestomatología, tal y como es denominada en la actualidad, tiene lejano origen y ya en culturas primitivas se practicaba y sigue practicándose la extracción dental. Estas y otras prácticas tienen un transfondo religioso y ritual y consisten a veces en coloraciones, adornos y mutilaciones.

Culturas como la etrusca y egipcia practicaban la imposición de prótesis dentarias tal y como hemos podido averiguar mediante la Arqueología.

Pero la estomatología no dió un paso de gigante hasta 1738 cuando Fanchard publica su libro "El cirujano dentista" cuyo trabajo le convierte en su fundador.

El desarrollo actual de la estomatología le ha permitido ampliar sus publicaciones abarcando otras subespecialidades como ortodoncia o corrección de la anormal disposición de las piezas dentarias, paradontología a cargo del estudio de la patología de los tejidos bucales, o la cirugía maxilofacial.

Los avances continuos en este campo pueden hacer del temido dentista el médico más encentador.

o sea:

$$\frac{1}{2}\,OA \,.\, BC < \frac{r^2 x}{2} < \frac{1}{2}\,OA \,.\, AP$$

pero $OA = r = 1$, $BC = \text{sen } x$ y $AP = \text{tg}x$

sustituyendo tendremos: $\text{sen } x < x < \text{tg } x$

dividiendo por el seno de x, queda:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x}$$

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

tomando límites

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

como $\frac{x}{\text{sen } x}$ está comprendido entre dos funciones cuyo límite cuando $x \to 0$ es 1, entonces tendrá el mismo límite o sea:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

6.1.—Derivada de la función seno.

Si tenemos la función $f(x) = \text{sen } x$ para hallar su derivada aplicamos la definición de derivada de una función en un punto:

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\text{sen}x - \text{sen}a}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2 \cos \frac{x + a}{2} \cdot \text{sen} \frac{x - a}{2}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} 2 \cos \frac{x + a}{2} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\text{sen} \frac{x - a}{2}}{x - a} =$$

$$= 2 \cos \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x \to a} \frac{\text{sen} \frac{x - a}{2}}{\frac{x - a}{2}} =$$

y como sabemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

tendremos:

$$= 2 \cos \frac{2a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \cos a.$$

Si tenemos que $f(x) = \text{sen } u$;

$$f'(x) = \cos u \cdot u'$$

La derivada del seno de una función es igual a la derivada de la función multiplicada por el coseno de la función.

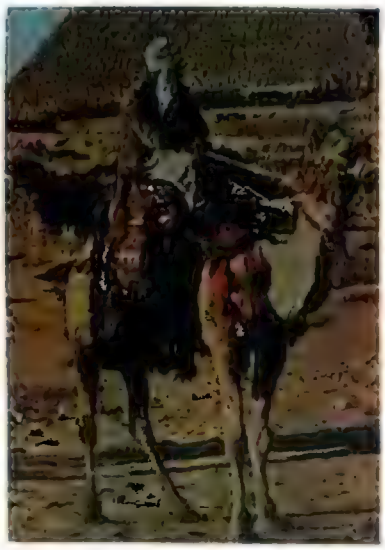
El primer europeo en probar el chocolate fue Hernán Cortés en la corte del emperador azteca Moctezuma en el siglo XVI.

El chocolate se fabricaba con las semillas de un árbol llamado cacahualt. El cacao o cacahualt es un arbusto que se cultiva en climas cálidos y húmedos como en las zonas tropicales de América y Africa donde su cultivo es muy importante. El árbol puede alcanzar siete metros de altura permaneciendo verde durante todo el año.

Al traer el cacahualt a España su nombre fue sustituido por chocolate y cacao extendiéndose mucho su bebida.

Como nota curiosa hay que destacar que la teobramina constituyente del chocolate en 6 gramos por kilo tiene acción estimulante inmediata en el organismo, de ahí, que sea tomada por los deportistas ante un esfuerzo prolongado.

Es notable, también, su valor calórico: 5.280 calorías por Kg. superior al aporte calórico del queso o de la carne.



El ser humano ha tenido que adaptar su vida a su supervivencia de modo que se establece en zonas que puedan garantizársela y emigrando de aquéllas que no le son favorables.

Es el caso de los primitivos pueblos como los nómadas de Malasia, Amazonas, Oeste interamericano o Africa.

Se trata de tribus que cultivan temporalmente las tierras tras la conquista de éstas a la selva o bien se dedican al pastoreo de acuerdo con los regímenes definitivos.

Suelen vivir agrupados en tribus que se desplazan con sus tiendas en busca de pastos, agua o tierra de cultivo, habitan en tiendas que transportan con facilidad y el modelo de sociedad y familia es patriarcal.

Son famosos los nómadas africanos como tuareg del Sahara y beduinos de Arabia o los mongoles y tibetanos y los Kirguiz.

Se trata de una forma de vida que cada vez cuenta con menos seguidores. Es una forma de existencia muy dura y arriesgada y carece de sentido en el mundo actual. Así el descubrimiento y auge del petróleo han sido motivo más que justificado para conseguir que los beduinos se conviertan en sedentarios y abandonen el camello.

Ejemplo

Hallar la derivada de:

$$f(x) = \text{sen}(2x^3 + 7x)$$

Solución

$$f'(x) = \cos(2x^3 + 7x) \cdot (6x^2 + 7)$$

6.2.—Derivada de la función coseno.

Para hallar la derivada de la función: $y = \cos u$ tenemos en cuenta que:

$$\cos u = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

entonces:

$$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

derivando por la regla del seno:

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot -u'$$

y el $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \text{sen } u$, entonces:

$$y' = -u' \cdot \text{sen } u$$

La derivada del coseno de una función es igual a menos la derivada de la función y multiplicada por el seno de la función.

Ejemplo

Calcular la derivada de:

$$y = \cos(5x^4 - 6x)$$

Solución

$$y' = (20x^3 - 6)\,\text{sen}\,(5x^4 - 6x)$$

6.3.—Derivada de la función tángente.

Para calcular la derivada de la función $y = \operatorname{tg} u(x)$ sabiendo que:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

podemos hallarla como derivada de un cociente:

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} u)'\cos u - (\cos u)'\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{u'\cos^2 u + u'\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} = u' \frac{(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{u'}{\cos^2 u} = u'\sec^2 u$$

$$y' = u'\sec^2 u = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$$

Ejemplo

Hallar la derivada de la función: $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{x}{5}\right)$

Solución

$$y' = \frac{3/2x^2 + 1/5}{\cos^2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{x}{5}\right)} = \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{x}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}\right)\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{x}{5}\right)\right]$$

6.4.—Derivada de la función cotangente.

La derivada de la función $y = \operatorname{otg} u(x)$ se obtiene de igual forma que la de la tangente. Sabiendo que:

$$\operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$y' = \frac{-u'\operatorname{sen}^2 u - u'\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u'\operatorname{cosec}^2 u =$$

$$= -u'(1 + \operatorname{ctg}^2 u)$$

La palabra láser proviene de la expresión Light Amplification by stimulated Emission of Radiation, amplificación de la luz mediante emisión estimulada de radiaciones.

La comprensión de esta forma de luz aún no es total y los conocimientos actuales son muy complejos. Sabemos que el láser da lugar a haces de luz monocromáticas internas de pequeño diámetro manteniendo estas características en largas distancias; también se caracteriza por concentrar con gran precisión grandes cantidades de energía.

Sus aplicaciones son numerosas en el campo de la ciencia y la técnica, permite investigar fenómenos ópticos con gran precisión o registrar helegramas por interferencia de los haces láser. También se ha podido medir, con la máxima precisión hasta ahora, la distancia Tierra-Luna mediante la emisión de un láser a nuestro satélite que allí era reflejado mediante un dispositivo y reenviado a la Tierra, la medide del tiempo empleado en el recorrido, da la distancia buscada. En medicina con su colaboración sehan podido realizar intervenciones quirúrgicas en la retina y por contrapartida ha hay sistemas de bombardeo aéreo en los que la luz láser proyectada guía al proyectil hasta el objetivo, de este modo el margen de error es de cincuenta centímetros y el poder destructivo mayor.

ARITMETICA DE NICOMACO

Nicómaco de Gerasa, matemático del siglo II destaca por su obra Introducción a la Aritmética que se compone de dos libros. El primero de los cuales se refiere a progresiones aritméticas que no aparecían en los escritos de Euclides y en la mención de los cuatro primeros números perfectos, que deben terminar en 6 o en 8. El quinto número perfecto aparece en un manuscrito del siglo XV, y en la actualidad el último número perfecto encontrado es el $2^{1278}(2^{1279} - 1)$ que tiene unas 770 cifras.

En el segundo libro vienen los número «figurados», así números poligonales, triangulares, etc. La más importante de sus deducciones es la que expresa que todo cubo es la suma de una serie de impares consecutivos. Así si la sucesión de impares consecutivos, empezando en la unidad, se agrupan, el primero, los dos siguientes, los tres, etc. se demuestra que son los cubos sucesivos, 1, 8, 27...

De esta manera, la suma de los n cubos será la suma de tantos impares consecutivos como suma de los n enteros consecutivos es decir

$$[\frac{1}{2} n (u + 1)]^2$$

Con números figurados sería la suma de cubos es el cuadrado de un número triangular.

Ejemplo

Hallar la derivada de la función:

$$y = \operatorname{ctg} \left(\frac{6x^3 - 8x}{(x + 2)} \right)$$

Solución

$$y' = \frac{\frac{(x+2)(18x^2-8) - (6x^3-8x)}{(x+2)^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{6x^3 - 8x}{x + 2} \right)} = \frac{\frac{18x^3-8x+36x^2-16-6x^3+8x}{(x + 2)^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{6x^3 - 8x}{x + 2} \right)} =$$

$$y' = \frac{\frac{-12x^3 - 36x^2 + 16}{(x+2)^2}}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{6x^3 - 8x}{x + 2} \right)} = \frac{-12x^3 - 36x^2 + 16}{(x + 2)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{6x^3 - 8x}{x + 2} \right)}$$

o también:

$$y' = \frac{-12x^3 - 36x^2 + 16}{(x + 2)^2} \cdot \operatorname{cosec}^2\left(\frac{6x^3 - 8x}{x + 2} \right)$$

$$y' = \frac{-12x^3 - 36x^2 + 16}{(x + 2)^2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{6x^3 - 8x}{x + 2}\right)$$

6.5.—Derivada de la función secante.

$$\text{Si } y = \sec u = \frac{1}{\cos u}$$

entonces derivando como un cociente:

$$y' = \frac{u' \operatorname{sen} u}{\cos^2 u} = \frac{u'}{\cos u} \cdot \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u};$$

$$y' = u' \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u$$

Ejemplo

Calcular la derivada de: $y = \sec \left(\frac{5x^2 - 6}{3x - 5} \right)$

Solución

$$y' = \frac{10x(3x-5)-3(5x^2-6)}{(3x - 5)^2} \cdot \sec\left(\frac{5x^2-6}{3x-5} \right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{5x^2-6}{3x-5} \right) =$$

$$= \frac{30x^2 - 50x - 15x^2 + 18}{(3x - 5)^2} \cdot \sec\left(\frac{5x^2 - 6}{3x - 5}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{5x^2 - 6}{3x - 5}\right) =$$

$$= \frac{15x^2 - 50x + 18}{(3x - 5)^2} \cdot \sec\left(\frac{5x^2 - 6}{3x - 5}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{5x^2 - 6}{3x - 5}\right)$$

6.6.—Derivada de la función cosecante.

$$\text{Si } y = \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

derivando como un cociente:

$$y' = -\frac{u' \cos u}{\operatorname{sen}^2 u} =$$

$$= -u' \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} u} \cdot \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotag} u$$

Ejemplo

Calcular la derivada de $y = \operatorname{cosec}(e^{2x+10})$

Solución

$$y' = -2e^{2x+10} \cdot \operatorname{cosec}(e^{2x+10}) \cdot \operatorname{cotag}(e^{2x+10})$$

7.—DERIVACION DE FUNCIONES INVERSAS.

• Sea $f^{-1}(x)$ la función inversa de f(x): Vamos a demostrar que la derivada en el punto x = a

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

Demostración.

De $(f \circ f^{-1}) = I_a$ — identidad sobre A

resulta: $(f \circ f^{-1})'(a) = 1 = f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a)$ y entonces si $f'(f^{-1}(a)) \neq o$

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

ROLLE (Michel)

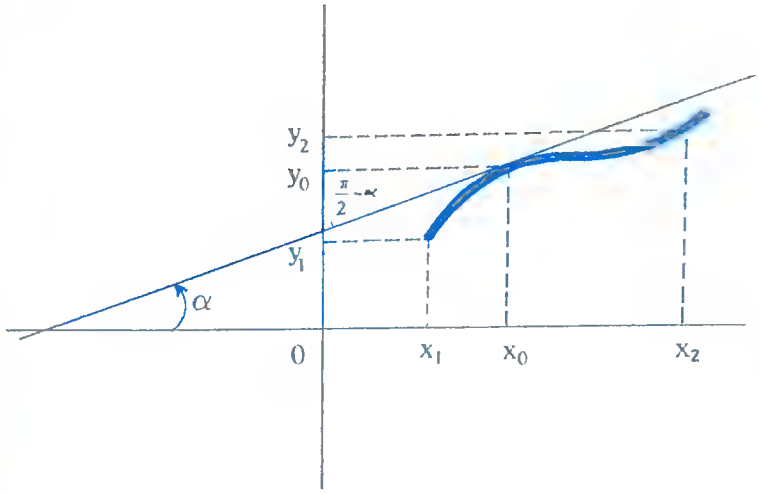
MATEMATICO francés, nació en Ambert en 1652 y falleció en París en 1719. Fue un gran dominador de la ciencia Matemática y en 1690 publicó un «Tratado de Algebra», en el que enseñaba un método para el cálculo de raíces de cierto tipo de ecuaciones. En 1691 nació el teorema que lleva su nombre respecto al cálculo infinitesimal, en el cual si una función y = f(x), está definida y es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, siendo derivable en el intervalo abierto $a < x <$; si además f(a) = f(b) = 0, existe por lo menos un número c entre a y b en el que f'(x) = 0, es decir, f'(c) = 0 para cierto valor c tal que $a < c < b$. Geométricamente esto significa que existe al menos un punto en el que la tangente es paralela al eje OX.

EL PLANO INCLINADO Y LA CUÑA

Rampas, calles con pendiente, cinceles, hachas, arados, martillos neumáticos, cepillos de carpintero: he aquí varios ejemplos de la cuarta máquina fundamental, es decir, el plano inclinado y su activa hermana gemela, la cuña. En sentido lato, el principio de la cuña comprende todos los instrumentos para tallar y horadar: desde el cuchillo de cocina, al volante-cuña en el rugby, un método de juego tan eficaz para romper la defensa adversaria que ha sido declarado irregular y, por tanto, severamente prohibido por las normas que rigen el juego.

continúa en la página siguiente

Interpretación geométrica:



Son complementarias las inclinaciones de las tangentes sobre uno y otro eje.

Nótese la inversión del sentido de rotación al permutar los ejes. Las derivadas de dos funciones inversas para valores correspondientes de x e y son números recíprocos.

APLICACIONES

7.1.—Derivada de la función inversa del seno.

Sea la función $y = \text{arc sen } u$, para calcular su derivada tenemos en cuenta que:

$$y = \text{arc sen } u \qquad u = \text{sen } y$$

Derivando

$$u' = y' \cos y$$

Despejando y'

$$y' = \frac{u'}{\cos y}$$

como, $\cos y = \sqrt{(1 - \text{sen}^2 y)}$, sustituimos:

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{(1-\text{sen}^2 y)}} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Ejemplo

Calcular la derivada de la función:

$$y = \text{arc sen } (5x^2 + 8x)$$

Solución

$$y' = \frac{10x + 8}{\sqrt{1 - (5x^2 + 8x)^2}} = \frac{10x + 8}{\sqrt{1 - (25x^4 + 64x^2 + 80x^3}}$$

$$= \frac{10x + 8}{\sqrt{1 - 25x^4 - 64x^2 - 80x^3}}$$

7.2.—Derivada de la función inversa del coseno.

Para derivar la función $y = \text{arc cos } u$ partimos de que es la función inversa del coseno:

$$u = \cos y$$

derivando:

$$u' = -y' \text{seny}$$

$$y' = \frac{-u'}{\text{sen } y} = -\frac{u'}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de la función:

$$y = \text{arc cos } (3^{2x+1})$$

Solución

$$y' = -\frac{2 \cdot 3^{2x+1} \text{ L } 3}{\sqrt{1 - (3^{2x+1})^2}} = \frac{2 \cdot 3^{2x+1} \text{ L } 3}{\sqrt{1 - 3^{4x+2}}}$$

7.3.—Derivada de la función inversa de la tangente.

Para derivar la función arco tangente tenemos en cuenta, de nuevo, que se trata de una función inversa:

$$y = \text{arc tgu}$$

$$u = \text{tg } y$$

viene de la página anterior

De cualquier modo, es más fácil darse cuenta de como actúa la cuña observando el plano inclinado, que es en realidad una cuña seccionada por la mitad (*dibujo arriba).* Pero mientras la cuña hace su función moviéndose, el plano inclinado permanece quieto, y es el material «acuñado» el que se mueve por encima.

Sobre un cuerpo situado en un plano inclinado actúan dos fuerzas, una perpendicular, la otra paralela al plano. Luego que la primera es equilibrada por la resistencia del plano mismo, el cuerpo permanece en reposo, aplicándole una fuerza igual y de sentido opuesto a la componente paralela; en cambio, se moverá hacia arriba aplicando una fuerza superior. Suponiendo la total ausencia de frotamiento en el plano, el esfuerzo de empuje preciso será igual a la décima parte del peso si la longitud del plano es diez veces su altura. Análoga relación sirve para cualquier plano: aumentando la distancia puede aplicarse una potencia menor respecto a la resistencia del peso.

LOGARITMOS DECIMALES

El progreso científico ha tropezado desde siempre con la dificultad de difundir las nuevas teorías. Actualmente esto ha quedado subsanado en parte por la existencia de publicaciones, celebración de congresos científicos y por el perfeccionamiento en los medios de comunicación.

La comunicación entre científicos no fue siempre tan sencilla y hace que momentos cruciales en la historia del progreso científico se vean rodeados de una atmósfera anecdótica, como es el caso de los logaritmos decimales.

Estos logaritmos decimales surgieron de la reunión de dos grandes matemáticos John Napier, barón de Merchiston, y Herny Briggs profesor en Oxford.

La gran reunión debería celebrarse en Edimburgo (Escocia) en el día que señaló el profesor Briggs según había acordado con John Marr. Briggs no llegó y Napier empezaba ya a dudar de la visitá de aquél, cuando un día Henry Briggs apareció de improviso. El encuentro fue algo especial y ambos matemáticos se contemplaron largo rato en silencio debido a su admiración mutua. Henry Briggs expuso su deseo de conocer cómo había llegado lord Napier a tan excelenta descubrimiento y comenzó una entrevista en la que adaptaron los logaritmos al sistema de numeración tomando como base 10. Nacieron así los logaritmos decimales.

Derivando

$$u' = y'(1 + tg^2 y)$$

despejando y':

$$y' = \frac{u'}{(1 + tg^2 y)} = \frac{u'}{1 + u^2}$$

$$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

Ejemplo

Calcular la derivada de la función

$$y = \text{arc tg} \frac{5x}{(x + 2)}$$

y simplificar el resultado.

Solución

$$y' = \frac{1}{1 + \dfrac{25x^2}{(x+2)^2}} \cdot \frac{5(x+2) - 5x}{(x + 2)^2}$$

$$y' = \frac{5x + 10 - 5x}{\dfrac{(x+2)^2 + 25x^2}{(x + 2)^2} \cdot (x+2)^2} = \frac{10}{x^2 + 4 + 4x + 25x^2} =$$

$$= \frac{10}{26x^2 + 4 + 4x}$$

Simplificando al dividir por 2

$$y' = \frac{5}{13x^2 + 2 + 2x}$$

7.4.—Derivada de la función inversa de la cotangente.

Teniendo en cuenta que tal arco cotangente es función inversa de la cotangente podemos escribir:

$$y = \text{arc ctg } u$$

$$. \ u = \text{ctg } y$$

y derivando:

$$u' = -y'(1 + \text{ctg}^2 y)$$

Despejando y':

$$y' = \frac{-u'}{(1+\text{cotag}^2\, y)} = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

Ejemplo

Calcular la derivada de la función:

$$y = \text{arc cotg}\left(\frac{3}{2-x}\right)$$

Solución

$$y' = \frac{1}{1+\dfrac{9}{(2-x)^2}} \cdot \frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3}{\dfrac{(2-x)^2+9}{(2-x)^2}\cdot(2-x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{13+x^2-2x}$$

8.—COMPOSICION DE FUNCIONES Y DERIVACION.

Sean las funciones f, g f: A⟶R y g: B⟶R con f(A)⊂B; si f es derivable en a y g es derivable en f(a) entonces (f o g) es derivable en el punto a. y se verifica que (g o f)'(a) =

= g' (f(a)) . f'(a)

Demostración.

Si f(x) es derivable en a:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right],$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + h(x)$$

con $\lim_{x\to a} h(x) = 0$

y por la derivabilidad de g en f(a), si existe δ tal que $f(x) \neq f(a)$ para $|x-a| < \delta$:

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} = g'(f(a)) + p(f(x)), \text{ con } \lim_{x\to a} p(f(x)) = 0$$

por la continuidad de la función compuesta g o f;

La Antártida ha sido motivo de disputas por las posibles riquezas de su territorio que originó la firma del Tratado Internacional del Antártico en 1959, en el que se establece que no será objeto de base militar alguna, y dejando libertad únicamente a la investigación científica. Políticamente está repartida entre el Reino Unido, Francia, Noruega, Australia y Estados Unidos.

Está situada en el Polo Sur y constituye una enorme extensión de hielos de gran volumen y un espesor alrededor de los 2000 metros Las costas son relativamente regulares y sólo hay dos profundas ensenadas: el mar del Weddell y el mar de Ross.

Se encuentra situada a unos 4000 km. de Africa, más de 2000 de Oceanía y 1000 de Sudamérica. Estas enormes distancias dificultan su descubrimiento y estudio, hecho que tuvo lugar en 1899.

A causa de las bajas temperaturas, sólo durante el verano crecen musgos, liquenes y hongos en la zona costera. La fauna marina está compuesta por aves como las gaviotas y petreles y varias especies de pingüinos. Los únicos mamíferos son las ballenas y las focas.

Los pingüinos no corren peligro pero las focas sufren espantosas matanzas por los cazadores de pieles. Las ballenas aunque numerosas están igualmente sometidas a grandes matanzas para aprovechar su aceite y su grasa.

BERNOULLI (Daniel)

NACIO en Groninga en 1700 y falleció en Basilea en 1782. Segundo hijo de Jean I y hermano de Nicolás II. Como anécdota curiosa citaremos que en la universidad de San Petesburgo al mismo tiempo eran catedráticos de matemáticas los dos hermanos (Nicolás II y Daniel).

Bien podemos catalogar al «sabio» Daniel como el hombre enciclopedia de la familia, ya que ocupaba las plazas de profesor de matemáticas de San Petesburgo en su primera época y de anatomía, física, botánica y filosofía en la universidad de Basilea. Se le ha considerado como uno de los fundadores de la Hidrodinámica; de ello da prueba su obra «Tratado de Hidrodinámica». Estudió las inclinaciones de las órbitas planetarias. Escribió un tratado sobre mareas. Dio, por fin, las primeras bases científicas de la «teoría cinética de los gases».

esto es:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

En el caso de que no existiera δ para el que $(|x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) \neq f(a)$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 = f'(a)$$

y también:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = 0$$

$$(g \circ f)'(a) = 0 = g'(f(a)) \cdot 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

(—no se olvide que g . por hipótesis es derivable en f(a)—)

Así pues en cualquier caso: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Si en un intervalo $A \subset R$ se tienen las condiciones anteriores, la función derivada $(g \circ f)'(x)$ es igual al producto $g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

9.—APLICACIONES FISICAS DE LA DERIVADA.

Muchos conceptos de Física y Química pueden expresarse mediante derivadas. Si un hecho físico puede representarse por una función, la derivada de esta función representará otros aspectos de dicho fenómeno. Así por ejemplo con la velocidad, la aceleración, etc.

El espacio recorrido por un móvil será una función del tiempo empleado en el recorrido.

Si

$$e = f(t)$$

Cuando haya transcurrido un incremento de t el espacio se habrá incrementado en:

$$\triangle e = f(t + \triangle t) - f(t)$$

Se define como **velocidad media** el cociente:

$$V_m = \frac{\triangle e}{\triangle t}$$

Si queremos hallar la **velocidad instantánea** pasaremos a límites.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{de}{dt}$$

Vemos que la velocidad instantánea es la derivada del espacio respecto al tiempo.

Con la aceleración ocurre lo mismo ya que la aceleración media podemos definirla:

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

si queremos hallar la aceleración instantánea o verdadera tomaremos límites:

$$\lim_{t \to 0} a_m = \frac{dV}{dt}$$

entonces:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d \cdot \left(\frac{de}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2}$$

la aceleración instantánea será la derivada primera de la velocidad con respecto al tiempo o también la derivada segunda del espacio respecto al tiempo.

Ejemplo

Si el espacio recorrido por un automóvil viene dado por la ecuación:

$$e = t^2 + 8t - 5$$

calcular la velocidad y aceleración al cabo de 10 segundos.

Solución

— Para calcular la velocidad derivamos una vez la ecuación del espacio con respecto al tiempo.

$$V = \frac{de}{dt} = 2t + 8$$

la velocidad al cabo de 10 segundos:

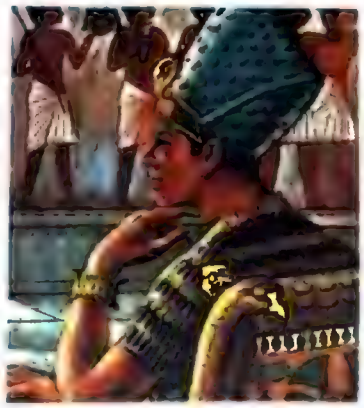
$$V = 2 \cdot 10 + 8 = 28 \text{ m/s}$$

— para el cálculo de la aceleración derivamos dos veces respecto al tiempo:

$$a = \frac{d^2e}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d(2t + 8)}{dt} = 2$$

$$a = 2 m/s^2$$

la aceleración en este caso no depende del tiempo, es constante.



Cuando pensamos en esculturas o pinturas que representan a hermosas mujeres de la Historia no podemos evitar referirnos a Nefertiti de la cual se conserva un famoso busto policromo en el museo de Berlín que fue encontrado en Tell al-Amarna y también un busto de marcita rosada que muestra una mujer extraordinaria belleza pese a estar inacabado.

Además Nefertiti fue un personaje histórico y no una simple modelo, se trataba de la reina de Egipto, esposa del faraón Amenofis IV Ajnatón. Se cree que a diferencia del resto de las grandes esposas reales Nefertiti era egipcia y no mitani. Rendía culto sagrado a Atón y por diferencias religosas se separó del faraón en el XII del reinado de Amarua retirándose al "Castillo de Atón" con cuatro de sus seis hijas y el príncipe Tut Anj Atón.

Otra gran reina de Egipto también llevó este nombre y fue esa de Ramsés II el cual le dedicó una magnífica tumba que se encuentra en el valle de las reinas.

10.— CUADRO RESUMEN DE DERIVADAS

FUNCION	FUNCION DERIVADA
FUNCION CONSTANTE $y = K$	$y' = 0$
FUNCION IDENTICA $y = x$	$y' = 1$
FUNCION POTENCIAL • $y = x^n$	$y' = n\, x^{n-1}$
• $y = u^m$ $(u = u(x))$	$y' = m\, u^{m-1} \cdot u'$
• $y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
• $y = \sqrt[n]{u}$ $(u = u(x))$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
SUMA DE FUNCIONES $y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCION $y = Ku$	$y' = Ku'$
PRODUCTO DE FUNCIONES $y = u \cdot v$	$y' = u'.v + v'u$

FUNCION	FUNCION DERIVADA
COCIENTE DE FUNCIONES $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
FUNCION INVERSA $y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
FUNCION COMPUESTA $y = f(u), (u = u(x))$	$y'_x = f'_u \cdot u'_x$
FUNCION LOGARITMICA • $y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
• $y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
• $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
FUNCION EXPONENCIAL • $y = a^u$	$y' = a^u \cdot u' \cdot La$
• $y = a^x$	$y' = a^x\ La$
• $y = e^x$	$y' = e^x$
• $y = u^v$	$y' = u^v \cdot v' \cdot Lu + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$

FUNCION	FUNCION DERIVADA
FUNCIONES CIRCULARES • $y = \text{sen } u$	$y' = u' \cos u$
• $y = \cos u$	$y' = -u' \text{ sen } u$
• $y = \text{tag } u$	$y' = u'(1 + \text{tg}^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \sec^2 u$
• $y = \text{cotag } u$	$y' = \frac{-u'}{\text{sen}^2 u} = -u' (1 + \text{cotag}^2 u)$
• $y = \sec u$	$y' = u' \sec u \cdot \text{tag } u$
• $y = \text{cosec } u$	$y' = -u' \text{ cosec } u \cdot \text{cotag } u$
• $y = \text{arc sen } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
• $y = \text{arc cos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
• $y = \text{arc tag } u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$
• $y = \text{arc cotag } u$	$y' = -\frac{u'}{1 + u^2}$

11.—DERIVADAS SUCESIVAS

Cuando una función f definida en un intervalo $A \subset R$ admite función derivada f' en el subconjunto $A_1 \subset A$, tiene sentido preguntarse si esta función f' es a su vez derivable en algún punto ó más aún en algún subintervalo de A_1.

Si existe algún subintervalo $A_2 \subset A_1$ en el que existe la función derivada de f' la representaremos por (f')' = f''; diremos que es la derivada segunda de la función f.

Así, para A = R y $f(x) = e^x$, $f' = f'' = e^x$; en cuanto a la función f(x) = Lx definida en (o, ∞) tenemos, en (o, ∞),

$f' = \frac{1}{x}$ y $f'' = \frac{-1}{x^2}$ también definida en todo el intervalo (o, ∞)

De modo análogo se definen las derivadas de cualquier orden n natural, por recurrencia sobre n: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'$, si existe la función derivada de la función f^{n-1} en algún intervalo no reducido a un solo punto.

Ejemplos: i) $f = e^x$, $f = f^{(n)}(x) = e^x$, para todo n natural.

ii) $f = k \cdot x^m$

m natural $\begin{cases} f^{(n)}(x) = k \cdot m(m-1)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n}; \text{ para } m \geq n \\ f^{(n)}(x) = o \text{ para } m < n \end{cases}$

iii) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot \operatorname{sen} x$; $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot \cos x$

De las propiedades de la derivación, deducimos inmediatamente:

$$(f + g)^{(n} = f^{(n} + g^{(n}$$

$(\lambda f)^{(n} = \lambda \cdot f^{(n}$ para λ constante.

y en general

11.1.—Fórmula de Leibnitz.

Sea $(f \cdot g)' = f'g + f.g'$

$$(f.g)'' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' =$$

$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

y así sucesivamente. Para n tendremos:

$$(f \cdot g)^{(n} = \binom{n}{o} f^{(n} g + \binom{n}{1} f^{(n-1} \cdot g' + \binom{n}{2} f^{(n-2} \cdot g'' +$$

$$+ \ldots + \binom{n}{h} f^{(n-h} \cdot g^{(h} + \ldots + \binom{n}{n} f \cdot g^{(n}$$

que esta fórmula de Leibnitz para la derivada del producto de dos funciones.

Por último si f, g, h son funciones derivables n veces:

DIEZMILESIMAS DE SEGUNDO: UNA MAQUINA FOTOGRAFICA QUE SECCIONA LOS RAYOS

Casi dos siglos después de que Benjamin Franklin lanzase hacia una nube de temporal una cometa armada con una punta metálica, consiguiendo atraer chispas por el cordón a que estaba ligada la cometa, nadie sabía efectivamente qué sucedía cuando un rayo surcaba el cielo. Sólo con la invención de una máquina fotográfica especial, capaz de descomponer aquella carga de electricidad en una secuencia temporal significativa, los investigadores consiguieron estudiar la anatomía de un rayo.

Esta máquina fotográfica, que usa un objetivo móvil para difundir la imagen del rayo sobre toda la película fue ideada por Sir Charles Vernon Boys en 1902. Las fotografías disparadas por la máquina de Boys indican que el relámpago principal es precedido por un «leader» —un relámpago indiferenciado y preliminar que se bifurca hacia la tierra desde la nube para abrir camino a las cargas principales. El leader puede emplear incluso una centésima de segundo para llegar a la tierra, pero las descargas principales, las de intensidad luminosa que parten desde la tierra para volver la nube de temporal, emplean cada una menos de una diezmilésima del segundo.

La ley de la persistencia de las imágenes luminosas en la retina, fundamento del cine, se conocía desde la antigüedad e inspiró en el siglo XVIII el trompo deslumbrante del abate Nollet. La linterna mágica, los juegos ópticos, las «sombras chinescas» y los trucos de ilusionismo dejaban entrever la posibilidad del cine.

Cuando el principio de la fotografía fue descubierto por Niepce y Daguerre, se pensó en dar movimiento a aquellas imágenes que reproducían la vida con toda exactitud. En 1882, Jules Etienne Marey inventó el fusil cronofotográfico, que permitía descomponer y fotografiar el movimiento. En 1888, Emile Reynaud patentó el «praxinoscopio» e ideó, además, la perforación marginal de la película.

La película transparente que podía ser proyectada en una pantalla blanca al pasar por delante de un chorro de luz, unida al invento de Marey y a las ideas de Reynaud, constituyeron las bases del invento de los hermanos Lumière, patentado por ellos el 13 de febrero de 1895. El 22 de marzo del mismo año, los Lumière hicieron una demostración de su invento en París, proyectando la primera película cinematográfica realizada en el mundo: «La salida de las fábricas Lumière». Tenía 17 metros de longitud. En la noche del 28 de diciembre de 1895 nació el cine como espectáculo, al celebrarse la primera sesión pública, que tuvo lugar en el Salón Indio, situado en los bajos del Gran Café de París.

continúa en la página siguiente

Para tres funciones:

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' gh + fg'h + fgh'$$

$$(f\,g\,h)'' = f'' gh + 2(f'g'h + f'gh' + fg'h') + fg''h + fgh''$$

$$= \frac{2}{2!\,o!\,o!}(f'' gh + fg''h + fgh'') +$$

$$+ \frac{2}{1!\,1!\,o}(f'g'h + f'gh' + fg'h')$$

y en general

$$(f\,g\,h)^{(n)} = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} f^{(\alpha}\, g^{(\beta}\, h^{(\gamma} \qquad \alpha+\beta+\gamma = n$$

La fórmula más general de derivada de un producto de varias funciones:

$$(f_1 \cdot f_2 \ldots f_m)^{(n)} = \sum_{n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m} \frac{n!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ldots\ \alpha_m!} f_1^{(\alpha_1}\, f_2^{(\alpha_2} \cdots f_m^{(\alpha_n}$$

que es la Fórmula de Leibnitz general y es análoga a la de potencia de un polinomio.

Si por ejemplo f, además, no se anula en un cierto intervalo, la función $\frac{1}{f}$ también es derivable n-veces.

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2};\ \left(\frac{1}{f}\right)'' =$$

$$= -\frac{f''\,f - 2(f')^2}{f^3} = \frac{2(f')^2 - f \cdot f''}{f^3}$$

12.—TEOREMA DE ROLLE

Teorema de Rolle: Si una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b] \subset R$ es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y además f(a) = f(b), entonces existe un punto c, $a < c < b$ tal que f'(c) = o.

Demostración.

Si una función es continua en un intervalo cerrado A = [a, b] entonces está acotada. Además el extremo superior L de f(A) es accesible y existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = L \geq f(a) = f(b)$.

1) Si fuera L = f(a) entonces $\forall x$, f(x) = f(a), luego:

$$\forall x,\ f'(x) = 0$$

con lo que se cumple el teorema para infinitas «c».

2) Si $L > f(a)$, vamos a ver que en el punto $c \in (a, b)$ para el que $f(c) = L$ se cumple $f'(c) = o$.

En efecto por hipótesis existe $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, pues $c \in (a, b)$; puesto que $f(x) \leq f(c)$, para todo x del intervalo tenemos

$$\lim_{x \to c+} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] \geq o$$

$$\lim_{x \to c-} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] \leq o,$$

luego ambos, por existir $f'(c)$, han de ser iguales, esto es $f'(c) = o$.

3) Si $\ell < f(a)$. Existe un punto $c \in (a, b)$ por el que $f'(c) = 0$ y se demuestra análogamente al anterior. (ℓ=extremo inferior)

13.— TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

Si f(x) es una función de A en R definida y continua en el intervalo cerrado $A = [a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) existe al menos un punto ξ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

o sea $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$

que se llama fórmula del incremento finito, que es lo que aplicamos en el cálculo infinitesimal, y expresa el valor de un incremento de la variable por el valor de la derivada en un punto intermedio.

Si los extremos del intervalo son x, $x+h$, todo punto interior se puede representar por $x + \theta h$ con $0 < \theta < 1$, el teorema nos da la fórmula debida a Lagrange:

$$f(x + h) - f(x) = h \cdot f'(x + \theta h) \text{ con } 0 < \theta < 1$$

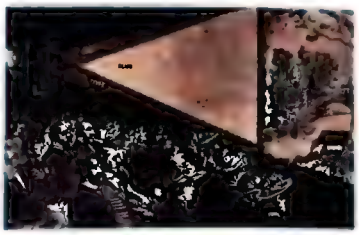
Obsérvese que si $f(a) = f(b)$ se tiene el teorema de Rolle.

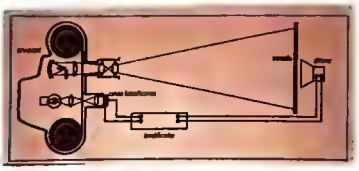
Demostración:

Sea la función $g(x) = f(x) \cdot (b - a) + x(f(a) - f(b)) + af(b) - bf(a)$ que es continua en [a, b] y derivable en (a, b) al igual que f(x) y toma valores iguales a cero en los extremos del intervalo:

$$g(a) = g(b) = 0$$

Por tanto podemos aplicar el teorema de Rolle o sea existe un punto intermedio (ξ) tal que $g'(\xi) = 0$





viene de la página anterior

En 1903, un francés llamado Georges Meliès, aficionado a los juegos de ilusionismo y organizador de espectáculos de feria, descubrió las enormes posibilidades del trucaje fotográfico y creó las bases para un cine en el que la fantasía, lo irreal y lo maravilloso tenían amplia cabida. Meliès poseía, además, gran audacia técnica y una inventiva inagotable. Muchas de sus películas (algunas de ellas coloreadas a mano) son auténticas obras de humor ingenuo y de poesía.

Contemporáneo y competidor de Meliès, aunque sin su talento ni su imaginación, Zecca descubrió que el cine es también una industria. Fué el iniciador de la producción en serie y rodó una «Pasión de Jesucristo» que todavía hoy sigue proyectándose. Zecca realizó también la primera película «realista» de la historia del cine, película que fue, asimismo, la predecesora de todas las cintas de «gansters».

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

El principio del cine sonoro se basa en convertir las ondas sonoras en ondas luminosas, las cuales, a su vez, son convertidas en sonidos mediante una célula fotoeléctrica que transmite el sonido a un par de altavoces situados a ambos lados de la pantalla donde se proyecta la imagen. En las películas sonoras, los fotogramas se han estrechado en el sentido de la anchura, con objeto de dejar en uno de los lados una banda de algunos milímetros sobre la cual queda impresionado el sonido.

Posteriormente y para competir con la televisión se inventó el Cinerama, que consiste en proyectar en una pantalla ligeramente cóncava y de una superficie aproximadamente seis veces mayor que la corriente, tres imágenes obtenidas mediante la filmación con una cámara dotada de tres objetivos: el objetivo central, en el eje del tema a fotografiar, tiene sendos objetivos laterales cuyos ejes son ligeramente convergentes. Las tres películas así filmadas son proyectadas simultáneamente con tres proyectores: el central envía su imagen a la parte central de la pantalla, y los laterales a las secciones derecha e izquierda, formando una imagen única que abarca casi por completo el campo de visión del ojo humano.

continúa en la página siguiente

Derivando tenemos:

$$g'(x) = f'(x)\,(b - a) + f(a) - f(b)$$

$$\text{y para } x = \xi$$

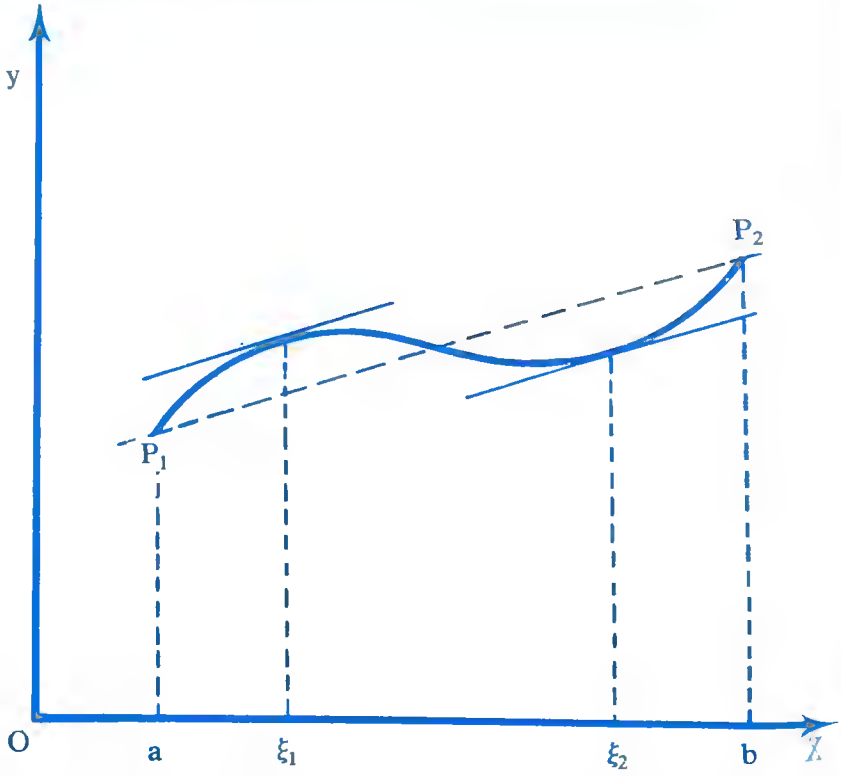
$$g'(\xi) = f'(\xi)(b - a) + f(a) - f(b) = 0$$

$$\text{luego } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Una consecuencia importante del teorema es que la condición necesaria y suficiente para que una función f(x) definida y derivable en [a, b] sea constante es que $f'(x) = 0$ en todo punto de (a, b), como se deduce de lo anterior.

Si dos funciones tienen derivadas finitas iguales en un intervalo la diferencia de ambas funciones es constante en todo él.

interpretación geométrica



En todo arco de curva uniforme y con tangente única en cada punto hay al menos un punto interior con tangente paralela a la cuerda P_1, P_2 que une los puntos extremos del arco de curva.

14.—FORMULA DE CAUCHY.

Si f(x) y g(x) son dos funciones continuas en [a, b] y derivables en (a, b) siendo $g(b) \neq g(a)$ y no se anulan simultáneamente las derivadas en ningún punto intermedio y para ningún punto $f'(x) = g'(x) = \infty$ entonces existe al menos un punto interior para el que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{siendo } a < \xi < b$$

Obsérvese que si $g(x) = x$ se tiene el teorema de los incrementos finitos.

Demostración:

Sea la función $\varphi(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$ tal que: $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$

Por lo que aplicando el teorema de Rolle

$$\varphi'(\xi) = 0 \qquad \text{con } a < \xi < b$$

Derivando $\varphi(x)$ tendremos:

$$\varphi'(x) = g'(x)[f(b) - f(a)] - f'(x)[g(b) - g(a)]$$

y para $x = \xi$

$$\varphi(\xi) = g'(\xi)[f(b) - f(a)] - f'(\xi)[g(b) - g(a)] = 0$$

$$\text{luego } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ya que no puede ser nula $g'(\xi)$

Generalización de la fórmula de Cauchy

Si en el punto a se anulan $f'(x)$ y $g'(x)$ pero no se anula simultáneamente en ningún punto entre a y b y la fórmula de Cauchy puede escribirse:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{g'(\xi_1) - g'(a)}$$

y suponiendo que tampoco se anulan simultáneamente $f''(x)$ y $g''(x)$ en ningún punto entre a y b aplicando nuevamente el teorema tendremos:

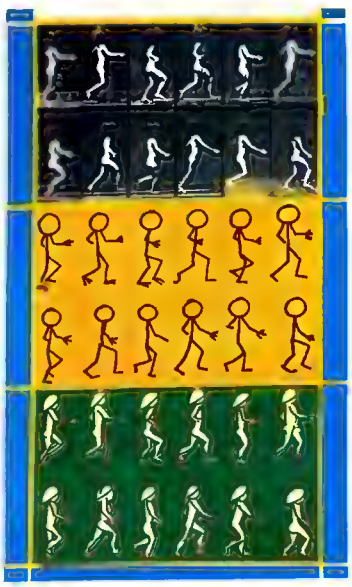
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} \quad \text{siendo } a < \xi_2 < b$$

y para n tendremos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}$$

Por tanto:

Si en el punto $x = a$ se anulan las derivadas de órdenes 1, 2, ..., n — 1 de $f(x)$, $g(x)$ pero ningún par de ellas ni tampoco $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ se anulan simultáneamente en ningún punto interior al intervalo (a, b), existe un punto de ese intervalo ξ tal que



viene de la página anterior

Otros procedimientos técnicos son el Cinemascope y el Vistavisión. El primero se basa en la lente hipergonar ideada por el sabio francés Henri Chrétien, capaz de contraer las imágenes al fotografiarlas y de devolverles sus proporciones normales en la proyección. Esta proyección abarca la superficie de una pantalla ligeramente cóncava y de un tamaño casi tan grande como la utilizada en el Cinerama.

El Vistavisión se basa en la obtención, en el rodaje de la película, de un negativo cuyos fotogramas tienen aproximadamente un tamaño doble del normal; positivada la película en fotogramas de tamaño corriente, la proyección en pantalla gigante se revela de una gran fidelidad y nitidez. Para el rodaje en Vistavisión se usa una cámara especial donde la película pasa horizontalmente.

Se conoce con el nombre de monumentos megalíticos a unas construcciones con piedras que se llaman menhires y dólmenes. Fueron erigidos durante el neolítico por los pueblos celtas en todo el noroeste de Europa.

Los menhires son grandes bloques de piedras verticales y que a veces alcanzan hasta 10 metros. Suelen forman alineaciones o estar dispuestos en círculos como en la región de Stonehenge en el sur de Inglaterra.

Los dólmenes están construidos con grandes losas horizontales que se apoyan en uno o varios bloques verticales.

Estos monumentos, que se encuentran en Dinamarca, en Suecia, en Córcega, Sicilia, España, nos permiten seguir el avance de las migraciones humamanas, al final de los tiempos prehistóricos.

Se supone que eran monumantos asociados al culto de los muertos, y tenían una función religiosa. En algunos casos podrían haberles servido de sepulturas. En algunos de ellos se han encontrado objetos y armas.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}$$

que es la fórmula de Cauchy generalizada.

15 –APLICACION DE LAS DERIVADAS AL CALCULO DE LIMITES. CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS POR LA REGLA DE L'HÔPITAL.

La regla de L'Hôpital, atribuida a Jean Bernoulli, es un sencillo corolario del Teorema de Cauchy.

1) Límites de la forma $\frac{0}{0}$

a) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tal que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$

siendo g(x) distinto de cero en un entorno reducido de a. Si f(x) y g(x) son continuas y con derivadas finitas no nulas simultáneamente en un entorno reducido de dicho punto y el cociente de derivadas tienen un límite finito o infinito para $x \to a$ se verifica

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

Por el teorema de Cauchy

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{con } a < \xi < x$$

Cuando x tiende hacia a ξ tiende también a a, por lo que si existe $\lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ también existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ya que

$$f(a) = 0 \text{ y } g(a) = 0$$

bien entendido que puede existir $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y no existir $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

NOTA:

Al ser la derivada continua, el límite será $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ y tiene que ser un valor finito, 0 ó ∞. Si por el contrario $f'(a) = g'(a) = 0$ aplicaremos al cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ la misma regla de L'Hôpital hasta que no se anulen ambas derivadas.

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Aplicando la regla L'Hôpital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Límite cuando $x \to \infty$

$$\text{Si } \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad \text{y } \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

y ambas funciones no se anulan simultáneamente para valores de x, y además $g(x) \neq 0$ se puede aplicar también la regla de L'Hôpital.

Demostración

En efecto haciendo $x = \frac{1}{z}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1/z)}{g(1/z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \text{ y si } x \to \infty \; z \to 0$$

luego $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ y cumple las condiciones anteriores. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{g'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x}(-\frac{1}{x^2})}{(\frac{-1}{x^2})} = 1$$

2) Forma $\frac{\infty}{\infty}$

a) La regla también es válida para el caso en que las funciones f(x), g(x) tengan límites infinitos para $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

En Oceanía se dan multitud de tribus y civilizaciones distintas como son los tapiros, los pesekhen y los timoriki, los kai, los akur, etc.

La estatura varía de 1'42 a 1'52 metros, la coloración de la piel es en tonos claros. Los cabellos son negros o bastante oscuros. La mayor parte de los pigmeos, se han asentado en zonas montañosas y se agrupan en minúsculos poblados de alguna decenas de habitantes. La forma de vivienda es la cabaña circular que cubren con un tejado cónico sostenido por un palo de dos metros, el pavimento se halla a un metro de altura del suelo y el espacio inferior se utiliza como depósito para leña y como pocilga.

La organización social es de extraordinaria simplicidad y su vida comunitaria es prácticamente nula.

Es escaso su interés por renovar los instrumentos y herramientas: hasta hace poco, bastantes tribus conocían solamente el arco, que les sirve tanto para la caza como para la defensa. Dedican especial atención a las flechas y sus diferentes usos. Los puñales se suelen fabricar de hueso; las herramientas revelan el carácter agrícola de estos pueblos dedicados al cultivo de caña de azucar y las bananas. Los instrumentos utilizados no pasan del bastón para excavar y de los anzuelos de piedra fabricados con sorprendente maestría.

De todas formas resulta difícil individualizar un tipo de cultura típica dada la similitud e influencia con otras tribus vecinas.

Entre las numerosas variedades en los tratamientos de hidrología médica o crenoterapia (tratamiento por las aguas minerales) se encuentra la talasoterapia.

En esta terapia se combina la acción benéfica del agua del mar del clima marino y del sol. No hay que olvidar que el mar tiene algo más que sal común puesto que el iodo se encuentra en notable proporción y su acción beneficiosa sobre el organismo es importante, además el efecto relajante del clima en nuestra vida (siempre controlado médicamente) no hay duda. Consecuencia de ello es que la talasoterapia, reduce el tiempo de convalecencia dosificando el organismo y supone una ventaja importante para los anémicos, linfáticos y personas que padecen "surmenage" y completa los tratamientos de rehabilitación y kinositerapia.

El tratamiento consiste en esencia en baños y duchas calientes complementados con masajes, como elementos característicos destacan aplicaciones de barro y de algas marinas, siendo estas últimas objeto de gran interés en la medicina actual por su poder curativo y como nutrientes.

$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ siempre que no se anulen simultáneamente f'(x) y g'(x) en un entorno del punto a. Siendo x_1 un punto cualquiera de este entorno, podemos ponerlo así:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{\dfrac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}}{\dfrac{f(x) - f(x_1)}{f(x)}} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}$$

y aplicando el Teorema de Cauchy será

$$= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}$$

Como f'(ξ) y g'(ξ) no se anulan simultáneamente y para un x_1 fijo el

$$\lim_{x\to a} \frac{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}} = 1$$

tendremos $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{L \operatorname{tag} 2x}{L \operatorname{tag} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tag} 2x}\,\dfrac{2}{\cos^2 2x}}{\dfrac{1}{\operatorname{tag} x}\,\dfrac{1}{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2/2x}{1/x} = 1$$

b) Si las funciones f(x) y g(x) tienen límites infinitos para $x \to \infty$ ponemos $x = \frac{1}{z}$ como se hizo anteriormente con lo que se ve que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{L(e^x + x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x + 1}{e^x + x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}(e^x + x) = \infty$$

3) Forma 0 . ∞

Si para $x \to a$ es $\lim f(x) = 0$ y $\lim g(x) = \infty$ se tiene

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

o bien $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ y estamos en los casos anteriores con lo que se puede aplicar también la regla de L'Hôpital.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot L\frac{x - a}{x + a} = \lim_{x\to\infty} \frac{L(x-a) - L(x+a)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2ax^2}{x^2 - a^2} = -2a$$

4) Caso ∞ — ∞

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

para hallar el $\lim [f(x) - g(x)]$ se pone

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x).g(x)}}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - x}{\frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\cos x}}{\frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

BERNOULLI (JEAN)

NACIO en Basilea en 1667, falleciendo en la misma en 1748. Profesor de matemáticas de la universidad de Groninga en 1695. A la muerte de su hermano Jacques, sustituyó a éste en su cátedra de Basilea en 1705. Colaborador de su hermano en la solución del problema de los isoperímetros, que, aunque con la misma y final solución, ambos llevaban distintos caminos para su estudio, lo que les valió no pocas discusiones.

Aplicando su buen hacer matemático, estudió la declinación de los planetas en colaboración con su hijo Daniel. Esto les valió a ambos el obtener el Premio de la Academia de Ciencia de Basilea. Reprochó a su hijo Daniel toda su vida el haber compartido dicho premio.

Fue profesor de Enler y amigo de Leibniz.

Realizó importantes trabajos sobre «Cálculo exponencial».

La fuerza implacable del vapor que desprendían las calderas dió impulso a la Revolución Industrial. Sustituyó a la fatiga del hombre y de los animales, permitiéndo realizar al hombre cosas imposibles con el solo concurso de sus músculos.

Newcomen, en los comienzos del siglo XVII, utilizó por vez primera el vapor para facilitar el drenaje de pozos mineros. Tocó el turno a Watt que perfeccionó las primeras y toscas máquinas, haciéndolas eficientes y transformándolas en una fuente de energía que Stephenson, a su vez, emplearía para accionar las ruedas de su locomotora. La primera máquina da vapor era limitada: estorbaba demasiado, excesivamente caliente, imposible emplear allí donde el fuego constituía peligro constante de incendio. Y sin embargo, sirvió para dar la medida de una época de inventores durante la cual el modelo primitivo se modificó hasta el punto de poderse alojar en el casco de pequeñísimas embarcaciones.

La potencia del vapor despertó el espíritu de invención de muchos otros hombres y pronto se difundieron, en todo el mundo occidental, fábricas, naves, locomotoras, todas accionadas por el vapor, destinado a convertirse en mago de las mil y una posibilidades, hasta el punto de que el período de la Revolución Industrial suele llamarse la «era del vapor».

5) Forma 0^0

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \text{ si } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Si $L = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ tomando logarítmos.

$$L(L) = \lim_{x\to a} [g(x) \,.\, L\, f(x)] \text{ que es de la forma } 0 \,.\, \infty$$

luego si hallamos aplicando la regla de L'Hôpital el límite de $g(x) \,.\, L\, f(x)$ y es λ

$$L = e^{\lambda}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} x^x$$

$$\lim_{x\to 0} x : Lx = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

luego $\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$

6) Forma ∞^0

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \text{ siendo } \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases}$$

Aplicando logarítmos neperianos tenemos

$\lim_{x\to a} [g(x)\, L\, f(x)]$ que es de la forma $0 \,.\, \infty$ y estamos igual que el caso 5)

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = L, \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} L(1+x)$$

$$\lim \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$$

luego $L = e^0 = 1$

7) Forma 1^{∞}

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \text{ siendo } \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \end{cases}$$

Aplicando logaritmos neperianos estamos en los casos 5 y 6.

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = L$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot L \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1} = 0$$

luego $L = e^0 = 1$

Dos consideraciones a tener en cuenta:

1. La regla de L'Hôpital es válida con la consideración de que en un cierto entorno de a no pueda anularse simultáneamente f'(x) y g'(x) excepto en el punto a donde ambas pueden ser nulas o no existir.

Tampoco puede anularse el denominador en un entorno de a. Estas dos se cumplen si g'(x) no se anula en un entorno reducido de a.

2. Que pueda existir el

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y carecer de } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aplicaremos reiteradamente la regla de L'Hôpital si en un punto a se anulan las derivadas primeras, segundas y así sucesivamente pero no se anula las enésimas, del numerador y denominador, siendo la de este último distinto de cero en un entorno de a y en un entorno reducido de a no se anulan simultáneamente la derivada del mismo orden, se verifica que si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y ambos coinciden

El cristal de roca se presenta en forma de prismas hexagonales apuntados por dos pirámides de seis caras.

Es considerado como una piedra preciosa ya que fue empleado por los egipcios para hacer vasijas de lujo o para hacer incrustaciones en estatuas como El Escriba sentado del Louvre. Los griegos y los romanos siguieron usándolo. A partir de la edad media se usó en orfebrería y joyería para relicarios, vajillas, etc. Durante el siglo XVII y XVIII se utilizó para hacer tabaqueras y candelabros.

En España se estableció la primera fábrica de cristal en la Granja de San Ildefonso bajo el reinado de Isabel de Farnesio, en 1808 se suspendió la producción debido a la guerra de la Independencia y en 1829, la fábrica pasó a una empresa particular y desapareció en 1849. Son famosos los cristales de Baccarat en Francia, los de Bohemia, los de Venecia en Italia, los de Leerdam en Países Bajos.

INSTRUMENTOS EFICIENTISIMOS

En la Universidad de Arizona un telescopio (arriba) recoge radiación infrarroja proveniente de planetas mediante un espejo parabólico de aluminio de 1,50 m. (en la armadura *central*). El espejo concentra la radiación sobre un revelador que mide con precisión las temperaturas de planetas lejanos millones de kilómetros.

Con delicados termómetros electrónicos conectados a sus telescopios, los astrónomos han descubierto que las temperaturas de otros planetas son extremadamente adversas para el hombre. Mercurio es tan caliente que llega a alcanzar los 415° C, mientras Plutón es tan frío que desciende a −155° C. Pero medidas más precisas de estas temperaturas revelan hechos nuevos relativos a los planetas, como la polvorosidad de su superficie.

Uno de los termómetros más sensibles a las temperaturas planetarias es un bolómetro de germanio, ideado por Frank Low, docente de la Universidad de Arizona. Su corazón es un minúsculo cristal, que reacciona a las más mínimas variaciones de temperatura con cambios de la resistencia eléctrica. El bolómetro de Frank Low ha descubierto que la temperatura de Júpiter por encima de las nubes va de −120° C a −145° C. Aunque esta temperatura parezca muy fría, era mucho más elevada de lo que Low esperaba y le indujo a pensar que Júpiter emite calor propio.

15.—EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{5}{2}x^2 + 7x - 22$

b) $y = -x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 6$

c) $y = 6x^7 - \frac{4}{5}x^5 + 7x^4 - 5x$

d) $y = 10x^5 + 3x^4 - 5x^2 + 3x - 1$

Solución

a) $y' = 5x + 7$

b) $y' = -5x^4 + 12x^3 - 15x^2$

c) $y' = 42x^6 - 4x^4 + 28x^3 - 5$

d) $y' = 50x^4 + 12x^3 - 10x + 3$

2. Calcular la derivada de:

a) $y = (8x + 7)\sqrt{2x}$

b) $y = (5x^3 - 11x + 7)\left(\frac{4}{3}x^6 + \frac{5}{9}x^3\right)$

Solución

a) $y' = 8\sqrt{2x} + \frac{2}{2\sqrt{2x}}(8x+7) = 8\sqrt{2x} + \frac{(8x + 7)}{\sqrt{2x}} =$

$$= \frac{16x + 8x + 7}{\sqrt{2x}} = \frac{24x + 7}{\sqrt{2x}}$$

b) $y' = (15x^2-11)\left(\frac{4}{3}x^6+\frac{5}{9}x^3\right) + \left(8x^5+\frac{5}{3}x^2\right)(5x^3-11x+7) =$

$$= 20x^8 + \frac{75}{9}x^5 - \frac{44}{3}x^6 - \frac{55}{9}x^3 + 40x^8 - 88x^6 + 56x^5 +$$

$$+ \frac{25}{3}x^5 - \frac{55}{3}x^3 + \frac{35}{3}x^2 =$$

$$= 60x^8 + \frac{218}{3}x^5 - \frac{220}{9}x^3 + \frac{35}{3}x^2 - \frac{308}{3}x^6 =$$

$$= 60x^8 - \frac{308}{3}x^6 + \frac{218}{3}x^5 - \frac{220}{9}x^3 + \frac{35}{3}x^2$$

3. Hallar las derivadas de:

a) $$y = \frac{5}{2 - x^2}$$

b) $$y = \frac{2x + 3}{2x - 3}$$

c) $$y = \frac{\sqrt{x^3}}{x - 4}$$

Solución

a) $$y' = \frac{2x}{(2 - x^2)^2}$$

b) $$y' = \frac{2(2x-3)-2(2x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{4x-6-4x-6}{(2x-3)^2} =$$

$$= \frac{-12}{(2x-3)^2}$$

c) $$y' = \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}(x-4) - \sqrt{x^3}}{(x-4)^2} = \frac{3x^2(x-4) - 2x^3}{(x-4)^2 \cdot 2\sqrt{x^3}} =$$

$$y' = \frac{3x^3 - 12x^2 - 2x^3}{(x-4)^2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{x^3 - 12x^2}{(x-4)^2 \cdot 2\sqrt{x^3}}$$

4. Calcular las derivadas de:

a) $$y = \sqrt{\frac{x^3 - 2}{2x + 6}}$$

b) $$y = \sqrt{\frac{2x + 9}{6x^4 - 11}}$$

Solución

a) $$y' = \frac{\frac{3x^2(2x+6)-2(x^3-2)}{(2x+6)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3-2}{2x+6}}} =$$

Antiguamente el lenguaje chino era similar al usado en los jeroglíficos egipcios. Pero el lenguaje evolucionó de manera que se llegaron a escribir aquellos signos para expresar ideas mucho más complejas y se pasó entonces a una escritura ideográfica. Estos ideogramas podían expresar: sol + luna = luz; hombre + hombre = amistad, aunque estos significados y los ideogramas cambiaron de forma hasta nueve veces y su complejidad también viene en función del trazo de la pluma con que se escriben.

Se pueden encontrar diccionarios que comprenden normalmente unos 10.000 signos aunque esencialmente son sólo 500.

En las escuelas se estudia simultáneamente el alfabeto latino con la lengua china aunque las dificultades de adaptación entre ambas son enormes. Como ejemplo la letra "i" tiene 69 significados diferentes que poseen además cada uno varios significados de acuerdo con su entonación.

Vemos aquí un ejemplo del esfuerzo de este pueblo por abrir paso a la cultura occidental sin abandonar las profundas y riquísimas raíces de su pasado, como decía Mao, ha de caminar sobre las dos piernas: presente y pasado.

De entre los pueblos amerindios que poblaban la América precolombina del Norte son famosos los navajos.

Se trata de una rama de los apaches emigrada del sur de Canadá hacia Nuevo Mejico en el 1200 a. J.C. y que más tarde en el XVIII en su traslado al oeste tropezaron con los intereses de los rancheros españoles de la zona y otros pueblos.

Tras su reclusión en Fort Summer en 1863 por Kit Carson en 1868 regresaban a sus tierras de Arizona y Nuevo México en cuyas reservas todavía viven.

Constituyen una de las poblaciones indígenas más numerosas y sus trabajos de artesanía son de gran belleza.

Sus joyas son trabajadas en plata con gran esmero y con martillos que recuerdan los trabajos de cuero de los españoles cuyo contacto influyó mucho en su artesanía.

Son muy famosos sus cuadros de arena que emplean en sus ritos mágicos y que estéticamente presentan gran originalidad y sus telas y alfombras.

El modelo de sociedad se centra en los poblados de chozas de tierras y la mujer es muy considerada hasta el punto que se considera la sucesión por línea materna.

Son a pesar de ello un pueblo y una raza aparte que no parece totalmente integrada en la sociedad blanca de EE. UU. por sus costumbres y forma de vida.

$$= \frac{6x^3 + 18x^2 - 2x^3 + 4}{\frac{2(6x^4-11)-24x^3(2x+9)}{(6x^4-11)^2}} = \frac{2x^3 + 9x^2 + 2}{(2x+6)^2 \cdot \sqrt{\frac{x^3-2}{2x+6}}}$$

$$\text{b) } y' = \frac{(2x+6)^2 \sqrt{\frac{x^3-2}{2x+6}}}{2\sqrt{\frac{2x+9}{6x^4-11}}} = \frac{12x^4-22-49x^4-216x^3}{2(6x^4-11)^2 \sqrt{\frac{2x+9}{6x^4-11}}} =$$

$$= \frac{-36x^4-216x^3-22}{2(6x^4-11)^2 \sqrt{\frac{2x+9}{6x^4-11}}} = -\frac{18x^4+108x^3+11}{(6x^4-11)^2 \sqrt{\frac{2x+9}{6x^4-11}}}$$

5. Calcular las derivadas de las funciones:

a) $y = (x^3 - 1)^2$

b) $y = (x^2 + 1)^4 + (x + 2)^3$

c) $y = (x^5 - 2x^2 + 6)^2$

d) $y = (x + 1)^3 - (x - 1)^3$

Solución

a) $y' = 2(x^3 - 1)(3x^2) = 6x^5 - 6x^2$

b) $y' = 4(x^2 + 1)^3 2x + 3(x + 2)^2 = 8x(x^2 + 1)^3 + 3(x + 2)^2$

c) $y' = 2(x^5 - 2x^2 + 6) \cdot (5x^4 - 4x) = 10x^9 - 8x^6 - 20x^6 +$

$+ 8x^3 + 60x^4 - 48x = 10x^9 - 28x^6 + 60x^4 + 8x^3$

d) $y' = 3(x + 1)^2 - 3(x - 1)^2 = 3x^2 + 6x + 3 - 3x^2 +$
$+ 6x - 3 = 12x$

6. Calcular la derivada de las funciones

a) $y = \left(\frac{3x}{x^2 - 1}\right)\left(\frac{x - 2}{7x}\right)$

b) $y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}\right)\left(\frac{2x}{(x - 3)^2}\right)$

Solución

a) $y' = \left(\frac{3(x^2-1)-2x(3x)}{(x^2-1)^2}\right)\left(\frac{x-2}{7x}\right) +$

$$+ \left(\frac{3x}{x^2-1}\right)\left(\frac{7x - 7(x-2)}{(7x)^2}\right) =$$

$$= \frac{(3x^2-3-6x^2)(x-2)}{7x(x^2-1)^2} + \frac{21x^2-21x^2+42x}{7x^2(x^2-1)} =$$

$$= \frac{-3x^3+6x^2-3x+6}{7x(x^2-1)^2} + \frac{42x}{49x^2(x^2-1)}$$

b) $y' = \left[\frac{\sqrt{x^2+3} - \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}\right)}{(x^2+3)}\right]\frac{2x}{(x-3)^2} +$

$$\frac{x}{\sqrt{x+3}}\left[\frac{(x-3)^2 \cdot 2 - 4x(x-3)}{(x-3)^4}\right] =$$

$$= \frac{(x^2+3-x^2)2x}{(x^2+3)\sqrt{(x^2+3)(x-3)^2}} + \frac{2x^3-12x^2+18x-4x^3+12x^2}{\sqrt{x+3}\,(x-3)^4} =$$

$$= \frac{6x}{(x-3)^2(x^2+3)\sqrt{(x^2+3)}} + \frac{-2x^3+18x}{(x-3)^4\sqrt{x+3}}$$

7. Hallar las derivadas sucesivas de las siguientes funciones:

a) $y = 6x^3 - 3x^2 + 7x - 10$

b) $y = 5x^6 + 8x^4 + 3x^3 - 15x$

Solución

a)

$$y' = 18x^2 - 6x + 7$$

$$y'' = 36x - 6$$

$$y''' = 36$$

La personalidad de los pueblos está representada en sus costumbres, su cultura, su religión, su arquitectura, sus trajes y su cocina.

Las cocinas nacionales tienen el encanto de los sabores típicos y van asociadas a la vida de sus consumidores, a sus creencias, a sus festividades, llenando de una peculiar manera la tradición de un pueblo.

En cada nación encontramos un lenguaje peculiar así la armonía combinación de arroz, pescado, carne, legumbres y salsas sin perder su sabor natural, es el alma de la cocina china, por contraste con los platos sazonados de los árabes; los alemanes preparan platos pesados y únicos con harina, fécula y grasa en tanto que los italianos hacen con los mismos ingredientes platos más ligeros.

Puede suceder que platos tradicionales y típicos escandalicen a los extranjeros como las ranas, los caracoles, las orugas y hormigas, etc. que consumen normalmente otros pueblos.

Platos como: alcuzcuz marroquí, carpa a la judía, borehtcn ruso, hamburguesa americana, choucroute alsaciana, pizza italiana, smorre brod sueco, patolacado chino, arroz indio, pudding inglés o Kebáb turco forman un variado menú que es prueba y reflejo de otras tantas mentalidades en un mundo tan hermosamente diverso como el nuestro.

Cuando un arquitecto diseña un edificio no sólo sirve al arte que le inspira sino también a una necesidad humana y esto le lleva a construir catedrales, alcázares, palacios, hospitales, aeropuertos, etc. Mucho más antiguos que estos últimos, los castillos, son un exponente de la arquitectur de finalidad militar defensiva. Sus altos muros, estrechas ventanas, torreones y barbacanas los hacían inexpugnables, o al menos esa era su intención.

La edificación se encuentra rodeada de un paso que dificulta la aproximación a unos muros altos y gruesos y sólo el puente levadizo es capaz de poner en contacto el castillo con el exterior; tras el puente una reja de hierro llamada rastrillo obstaculizaba aún más la penetración. El sistema de defensa exterior actúaba desde las almenas con hábiles arqueros o con aceite y proyectiles de piedra desde las barbacanas. La supervivencia en caso de asedio quedaba garantizada durante un tiempo con los alimentos almacenados en el sótano de la torre del homenaje, edificación con muros de piedra muy gruesos y punto final del asalto al castillo.

Cuando la época del feudalismo concluye y con ello la dominación del señor en sus tierras y las guerras entre éstos, los castillos se transformaron en residencias palaciegas perdiendo la rudeza de sus primeras muestras. Para el hombre de hoy son monumentos de incalculable valor artístico e histórico en el estudio de la evolución del modo de vivir del hombre.

b)

$$y' = 30x^5 + 32x^3 + 9x^2 - 15$$

$$y'' = 150x^4 + 96x^2 + 18x$$

$$y''' = 600x^3 + 192x + 18$$

$$y^{(4} = 1.800x^2 + 192$$

$$y^{(5} = 3.600x$$

$$y^{(6} = 3.600$$

8. Hallar las derivadas:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2 + 7}{8x - 2}}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{2+7x}}$

Solución

a) $y' = \dfrac{\dfrac{(8x-2)2x - 8(x^2+7)}{(8x-2)^2}}{5\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^2+7}{8x-2}\right)^4}} = \dfrac{16x^2-4x-8x^2-56}{5(8x-2)^2\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^2+7}{8x-2}\right)^4}} =$

$$= \frac{8x^2 - 4x - 56}{(8x-2)^2\, 5\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^2+7}{8x-2}\right)^4}}$$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{(2+7x) - x(7)}{(2+7x)^2}}{4\sqrt[4]{\left(\dfrac{x}{2+7x}\right)^3}} = \dfrac{2+7x-7x}{4(2+7x)^2\sqrt[4]{\left(\dfrac{x}{2+7x}\right)^3}}$

$$= \frac{2}{4(2+7x)^2\sqrt[4]{\left(\dfrac{x}{2+7x}\right)^3}} = \frac{1}{2(2+7x)^2\sqrt[4]{\left(\dfrac{x}{2+7x}\right)^3}}$$

9. Hallar el valor de la derivada primera de las funciones

a) $y = \frac{3}{4}x^4 - 5x + 15$ para $x = -1$

b) $y = \sqrt{2x^2 + 14}$ para $x = 1$

Solución

a) $y' = 3x^3 - 5 \qquad x = -1$

$y' = -3 - 5 = -8$

b) $y' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 14}} \qquad x = 1$

$y' = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

10. Calcular la derivada de las funciones:

a) $y = L\,(8x^3 + 32)$

b) $y = L\,(x + 2)^2$

c) $y = \sqrt{Lx}$

Solución

a) $y' = \frac{24x^2}{8x^3 + 32}$

b) $y' = \frac{2(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2}$

c) $y' = \frac{1/x}{2\sqrt{Lx}} = \frac{1}{2x\sqrt{Lx}}$

11. Calcular la derivada de las funciones:

a) $y = 1g_5(3x + 10)$

b) $y = 1g\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

c) $y = 1g_3\,(\sqrt{1+x^2})$

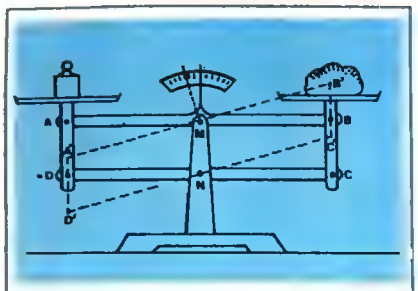
La mosca común se caracteriza por grandes ocelas pardas pequeñas antenas y trompa chupadora, su tamaño oscila entre 0,5 cm. y 1 cm. Tiene además seis patas provistas de uñas y ventosas que les permiten sujetarse incluso en superficies muy lisas.

La mosca doméstica o común suele vivir en las casas donde las hembras depositan hasta 2.000 huevos de los cuales nacerán los nuevos individuos que completarán su desarrollo en un intervalo de 15 días a 1 mes.

Además de la mosca doméstica otras especies son también conocidas como la mosca azul de la carne; la Mippobosca equina o del establo que afecta a las caballerías; mosca verde que deja sus huevos en la carne putrefacta.

Especies nuevas conocidas y muy perjudiciales son las que afectan a los frutos como la mediterránea, la de los frutos antillanos y la mexicana y la mosca del olivo.

Otro grupo lo forman la Piophila casi cuyas larvas producen los gusanos del queso, o la tsètse que transmite la enfermedad del sueño. Entre todas estas catástrofes originadas por moscas hay que señalar el gran servicio prestado a la investigación genética de los cromosomas por la Drosaphila, mèlanagaster o mosca del vinagre.



ROBERVAL

NACIO este matemático y físico francés en el año 1602 y murió en París en 1675.

Después de ser profesor de filosofía en el colegio Gervais, fue titular de la cátedra de matemáticas en el Colegio de Francia en el año 1632.

Por una técnica personal que llamó «método de los indivisibles» estudia la cuadratura de las superficies y el volumen de los sólidos. Por ello determinó el área de un arco de cicloide y el volumen generado por este arco al girar sobre su eje.

También creó un método sencillo para el trazado de las tangentes a una curva por el procedimiento cinemático de los movimientos compuestos.

En 1670 describió una nueva balanza que lleva su nombre.

BALANZA DE ROVERVAL

Se compone de una cruz con tres cuchillos A.M.B. los platillos descansan sobre los cuchillos extermos A y B, y se gulan sus desplazamientos por espigas verticales AD y BC, unidas por una palanca D N C, móvil alrededor del punto fijo N. Esta palanca está oculta en un soporte de fundición. Las espigas AD y BC permanecen verticales y los platillos están siempre horizontales.

Solución

a) $$y' \frac{3 \lg_5 e}{3x + 10}$$

b) $$y' = \frac{\frac{(2-x) + (2+x)}{(2-x)^2}}{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)} \lg e =$$

$$= \frac{(2-x)(2-x+2+x)}{(2+x)(2-x)^2} \lg e = \frac{4}{4 - x^2} \lg e$$

c) $$y' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}} \lg_3 e = \frac{2x}{2(1+x^2)} \lg_3 e =$$

$$= \frac{x}{(1 + x^2)} \lg_3 e$$

12. Calcular la derivada de las funciones siguientes:

a) $y = e^{3x} \cdot (x^2 + 10)$

b) $y = 5^{(x^2-x+21)}$

c) $y = x \cdot e^{-15x}$

Solución

a) $$y' = 3e^{3x}(x^2+10) + e^{3x} \cdot 2x =$$

$$= 3e^{3x} x^2 + 30e^{3x} + 2xe^{3x} =$$

$$= e^{3x} (3x^2 + 2x + 30)$$

b) $$y' = 5^{(x^2-x+21)} \cdot L\,5 \cdot (2x - 1)$$

c) $$y' = -15x\, e^{-15x} + e^{-15x} = e^{-15x} (1-15x)$$

13. Calcular la derivada de:

a) $y = \ln \sqrt[5]{x^2}$

b) $y = \ln \left(\frac{e^{2x}}{e^{3x} + 2} \right)$

c) $y = \lg x^2 \sqrt{2x + 5}$

Solución

a) $y' = \dfrac{\frac{2x}{5\sqrt{x^8}}}{\sqrt[5]{x^2}} = \dfrac{2x}{5x^2} = \dfrac{2}{5x}$

b) $y' = \dfrac{\frac{(e^{3x}+2)2e^{2x} - e^{2x}(3e^{3x})}{(e^{3x}+2)^2}}{\frac{e^{2x}}{e^{3x}+2}} =$

$$= \frac{(e^{3x} + 2)\,(2e^{5x} + 4e^{2x} - 3e^{5x})}{(e^{3x} + 2)^2\, e^{2x}} =$$

$$= \frac{e^{2x}\,(4 - 2e^{3x})}{(e^{3x} + 2)\, e^{2x}} = \frac{4 - e^{3x}}{e^{3x} + 2}$$

c) $y' = \dfrac{2x\sqrt{2x+5} + \frac{2x^2}{2\sqrt{2x+5}}}{x^2\sqrt{2x+5}} \lg e = \dfrac{4x(2x+5) + 2x^2}{2x^2(2x+5)} =$

$$= \frac{8x^2 + 20x + 2x^2}{2x(2x+5)} = \frac{10x^2 - 20x}{2x^2(2x+5)} = \frac{5x+10}{x(2x+5)}$$

14. Calcular las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas:

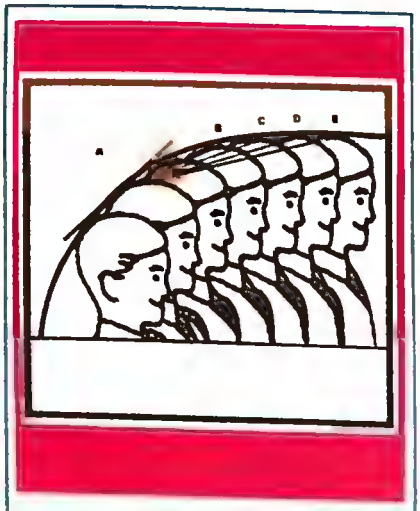
a) $y = \operatorname{sen} x^2$

b) $y = \cos 8x$

c) $y = \operatorname{tg} 5x$

La célebre teoría de la lucha por la existencia, del naturalista inglés Darwin (1731-1802), se basa, entre otras cosas, en el hecho de que numerosos animales recurren a adaptaciones protectoras, para poder subsistir ellos y su descendencia, o, dicho de otra manera, para sostener la lucha por la vida en un mundo en que están rodeados de enemigos. Por ello se observa muy a menudo, sobre todo entre los insectos, que dos especies no emparentadas presentan la misma forma y parecidos colores. Una de las especies es, por lo general, venenosa o repulsiva, de lo cual deduce Darwin que la especie protegida es imitada o remedada por la especie no protegida (mimetismo), con el fin de inducir a error a los enemigos, pájaros o lagartos. Otro hecho en que se apoya esta teoría es que numerosos animales imitan en formas diversas el medio en que viven, y pueden, gracias a este disfraz, escapar de sus enemigos (homocromía). Se encuentran buenos ejemplos de homocromía en los animales de las regiones desérticas: su coloración corresponde en muchos casos de una manera absoluta a la de la arena o las piedras. Además, la superficie de su cuerpo presenta una estructura áspera, granulada.

Semejante imitación del medio, repetimos, se encuentra muy extendida, sobre todo, entre los insectos. Muchos de ellos imitan en sus formas o su colorido los elementos de las plantas, ya sean ramas, hojas, granos o frutos.



CALCULO INFINITESIMAL

Los conceptos de infinito e infinitésimo se encuentran ligados a las matemáticas como su esencia misma y nacieron con la ciencia.

La idea del infinitésimo fue preconizada por Arquímedes y esta influencia llegaría hasta el Renacimiento en el que resurgiría y se extendería en las épocas que le siguieron.

Una notable contribución nos llega de manos de Luca Valerio al cuál Galileo compararía en su época con Arquímedes. Este matemático italiano Valerio enuncia un teorema por el cuál a una curva o superficie se le pueden inscribir o circunscribir otra figura constituida por polígonos, cilindros o formas prismáticas que adoptan estructura de escalera. Si estos «escalones» situados por encima y por debajo de la figura dada se van aproximando tanto como queramos, la diferencia se reducirá igualmente tanto como queramos. Esta diferencia se convertirá en infinitésimo y habremos conseguido aproximar la curva o superficie con otra figura.

Solución:

a) $y' = 2x \cos x^2$

b) $y' = -8 \operatorname{sen} 8x$

c) $y' = 5(1 + \operatorname{tg}^2 5x)$

15. Hallar las derivadas de las funciones:

a) $y = \cos^2 x$

b) $y = \operatorname{sen}^2(x^2 + 10)$

c) $y = \operatorname{tg}^3(5x)$

Solución:

a) $y' = -2\cos x \cdot \operatorname{sen} x$

b) $y' = 2\operatorname{sen}(x^2 + 10) \cdot 2x \cdot \cos(x^2 + 10) =$

$= 2x \operatorname{sen} 2(x^2 + 10)$

c) $y' = 3\operatorname{tg}^2(5x) \cdot 5\left(1 + \operatorname{tg}^6(5x)\right) = 15 \operatorname{tg}^2 5x (1 + \operatorname{tg}^6(5x))$

16. Calcular la derivada de:

a) $y = \sqrt[4]{\cos x}$

b) $y = \cos^2 x \cdot \cos x$

c) $\dfrac{\cos 3x + \operatorname{sen} 3x}{\cos 3x - \operatorname{sen} 3x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{4\sqrt[4]{\cos^3 x}}$

b) $y' = 2\cos x \cdot \cos x(-\operatorname{sen} x) + (-\operatorname{sen} x)\cos^2 x = -\operatorname{sen} x(3\cos^2 x)$

c) $y' = \dfrac{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)(-3\operatorname{sen} 3x + 3\cos 3x) - (\cos 3x + \operatorname{sen} 3x) \cdot}{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)^2}$

$\cdot (-3\operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x)$

$$= \frac{-3\cos 3x \operatorname{sen} 3x + 3\cos^2 3x + 3\operatorname{sen}^2 3x - 3\operatorname{sen} 3x \cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x \cos 3x.}{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)^2}$$

$$\frac{+3\cos^2 3x + 3\operatorname{sen}^2 3x + 3\operatorname{sen} 3x \cos 3x}{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)^2} =$$

$$= \frac{6\cos^2 3x + 6\operatorname{sen}^2 3x}{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)^2} = \frac{6}{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)^2}$$

17. Calcular la derivada de:

a) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{sen}^2 (x + 2)$

b) $y = \operatorname{cosec}^2 (2+x)$

c) $y = x^2 \sec^3 (x-7)$

Solución

a) $y' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \operatorname{sen}^2 (x+2) + 2\operatorname{sen}(x+2) \cdot \operatorname{ctg} x \cos(x+2)$

$$y' = -\operatorname{sen}^2(x+2) + \frac{\operatorname{sen}^2(x+2)}{\operatorname{tg}^2(x)} + \frac{\operatorname{sen} 2(x+2)}{\operatorname{tg}^2(x)}$$

b) $y' = 2 \operatorname{cosec} (2+x) (\operatorname{cosec} (2+x) \operatorname{ctg} (2+x)) =$

$$= 2 \operatorname{cosec}^2(2+x) \cdot \frac{\cos(2+x)}{\operatorname{sen}(2+x)} = 2 \operatorname{cosec}^3(2+x)\cos(2+x)$$

c) $y' = 2x \sec^3(x-7) + 3\sec^2(x-7) \cdot x^2 \cdot (\sec x + 7) \operatorname{tg} (x-7)) =$

$$= \sec^3(x-7) (2x + 3x^2 \cdot \operatorname{tg}(x-7) =$$

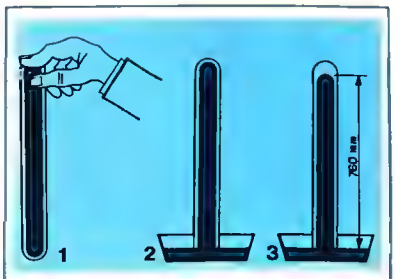
$$= \sec^3(x-7) [2x + 3x^2 \operatorname{tg}(x-7)]$$

18. Calcular las siguientes derivadas:

a) $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$

b) $y = \operatorname{arc} \cos 2x$

c) $y = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x+2}{2-x}\right)$



TORRICELLI (Evangelista)

MATEMATICO y físico italiano, nacido en Foenza en 1608, falleciendo en Florencia en 1647. Estudiante aventajado en el colegio de los jesuitas. A la edad de 20 años fue enviado a Roma. Allí entabló amistad con Galileo al que admiró por sus estudios y descubrimientos. Llamó la atención a Galileo por un trabajo de Torricelli sobre el movimiento de los cuerpos pesados. En su obra «De motu gravium naturalitor descentiem et proiectorium» publicado en 1641, que un sistema material se encuentra en equilibrio cuando su centro de gravedad está en la posición más baja posible. El principio de la conservación de la energía en este trabajo, desarrolló un importante paso. En 1643, realizó la experiencia que lleva su nombre y gracias a éste se descubrió el barómetro.

En 1644, los fontaneros de Florencia habían intentado, sin conseguirlo, una bomba que elevase el agua a más de 32 pies. Consultado a tal respecto, Galileo tampoco pudo conseguirlo. Entonces Torricelli, utilizando el tubo de mercurio sacó el valor de la presión atmosférica y en función de éste solucionó el problema.

En 1645 en su «opera Gemonétrica» estableció la fórmula del área del cicloide. Estudió las leyes sobre el derrame de los líquidos. Es también inventor de un termómetro.

En la figura 1 vemos un tubo lleno de mercurio y obstruido con el dedo. En la figura 2 se da la vuelta al tuvo encima de una vasija de mercurio. En la figura 3, se quita el dedo y observamos que el mercurio se queda a una altura; medida ésta, observamos que es de 760 m/m aproximadamente que es la medida de la presión atmoférica.

Entre lo que podíamos llamar enciclopedias de la antigüedad, destacan la de Capella en el siglo V, que comprendía las siete ciencias del entonces saber humano. En el siglo VII el obispo Isidoro de Sevilla hizo las «Etimologías» que fue más completa.

Moreri creó su «Diccionario Hîstórico» por orden alfabético en 1674, y en el siglo XVIII, Francia, por medio de los jesuitas, lanzó el «Diccionario de Trevoux y la «Enciclopedia de Diderot y D'Alambert, basada en la «Eyclopaedia» britanica de Chambers. Siguió Francia publicando enciclopedias destacando la «Enciclopedia del siglo XIX, diccionario Universal de P. Larrousse, y en el siglo XX la Gran Enciclopedia Larrousse. Los británicos hicieron la «Gran Enciclopedia Británica» bajo la dirección de los profesores Spencer Baunes y Robertson Smith. En Alemania destacan la «Enciclopedia Universal» y el Diccionario enciclopédico de Meyer.

En España son las más importantes el Diccionario Hispanoamericano de Montaner y Simón, la Enciclopedia Universal ilustrada de Espasa-Calpe con 82 volúmenes, apéndices y suplementos anuales. De menor importancia están las enciclopedias de Salvat, Labor y Sopena.

Solución

a) $$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

b) $$y' = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{(2-x)+x+2}{(2-x)^2}}{1+\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2} = \frac{2-x+x+2}{(2-x)^2+\frac{(2-x)^2(x+2)^2}{(2-x)^2}} =$$

$$= \frac{4}{(2-x)^2+(x+2)^2} = \frac{4}{4-4x+x^2+x^2+4x+4} = \frac{4}{2x^2+8} =$$

$$= \frac{2}{x^2+4}$$

19. Calcular la derivada de estas funciones aplicando derivación logarítmica

a) $y = e^{5x^2}$

b) $y = 2^{3x^2-4}$

c) $y = (x^2 + 4x + 2)^x$

Solución

a) $Ly = L\, e^{5x^2} = 5x^2$ $\qquad \frac{y'}{y} = 10x$

$$y' = 10xy = 10x \cdot e^{5x^2}$$

b) $Ly = L\, 2^{3x^2-4} = (3x^2-4)L2$ $\qquad \frac{y'}{y} = 6x \cdot L2$

$$y' = 6x\, L2 \cdot y = 6x\, L2 \cdot 2^{3x^2-4}$$

c) $$Ly = L\,(x^2+4x+2)^x = xL\,(x^2+4x+2)$$

$$\frac{y'}{y} = L\,(x^2+4x+2) + x\,\frac{(2x+4)}{(x^2+4x+2)}$$

$$y' = y[L\,(x^2+4x+2) + \frac{2x^2+4x}{(x^2+4x+2)}] =$$

$$= (x^2+4x+2)^x\, L(x^2+4x+2) + (x^2+4x+2)^x \cdot \frac{(2x^2+4x}{(x^2+4+2)} =$$

$$= (x^2+4x+2)^x\, L\,(x^2+4x+2)\,(x^2+4x+2)^{x-1}\,(2x^2+4x)$$

TEMA 38

DIFERENCIACION DE FUNCIONES

INDICE

1.—DEFINICION.

2.—DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS.

3.—PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL.

4.—DIFERENCIALES SUCESIVAS.

5.—INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.

6.—COMPOSICION DE FUNCIONES Y DIFERENCIACION

7.—APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL.

7.1.—Aplicación a máximos y mínimos.

7.2.—Error absoluto de una función $y = f(x)$.

7.3.—Diferencial logarítmica de una función. Error relativo.

8.—EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

TEMA 38

DIFERENCIAL

EL DECLINAR DEL DOGMATISMO

Ciencia y religión han renunciado a buena parte de su dogmatismo. Ambas han abandonado pretensiones inútiles sobre la certeza de sus modelos, físicos y metafísicos respectivamente, del universo. Los teólogos se han rendido a la perspectiva histórica y a la convicción de que fé y moralidad, en mayor medida que la metafísica, son los elementos fundamentales de la experiencia religiosa. Los científicos se han sometido frente a los recientes e importantísimos descubrimientos de la ciencia misma.

Durante los primeros decenios del siglo XIX muchos científicos creían que el universo funcionaba como una máquina; que sus componentes eran masas de materia viva silenciosa, incolora e inodora. El astrónomo francés Laplace argumentaba que, con el conocimiento completo de la máquina en cada instancia, un matemático sería capaz teóricamente de calcular y predecir todos los futuros estados de la máquina y todos los acontecimientos venideros.

continúa en la página siguiente

1.— DIFERENCIACION DE FUNCIONES

Si una función f es derivable en el punto a podemos definir en dicho punto una aplicación de R en R de la forma que se sigue:

Fijado a, a cada valor h se le hace corresponder el valor f'(a).h; esta función se expresa df: df(a, h) = f'(a) . h

Cuando f es derivable en todo punto de un intervalo A ∈ R entonces podemos definir, igualmente;

$$df(x, h) = f'(x) \cdot h$$

obsérvese que df es función de dos variables x y h, y que mientras x ha de estar siempre en A, para h no hay limitación alguna.

Ordinariamente se escribe simplemente df = f'(x) . h; ahora bien, cuando pongamos f(x) = x tendremos df = dx = 1 . h de aquí que generalmente se escriba df = f'(x) . dx pero bien entendido que dx no depende en absoluto de x.

Con el símbolo d f ó dy hemos designado el producto f'(x) . dx siendo dx un incremento arbitrario de la variable independiente x.

Hay una diferencia fundamental de significado entres los símbolos dx y dy. Mientras dx, es arbitrario, dy depende de la función f(x), del valor de x y del valor de dx y el símbolo dy carece de todo significado numérico si no se conocen estos tres datos.

Para evitar confusiones muchos lo designan como d_x y expresando cual es la variable independiente como $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

o bien $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d_x y}{dx}$

entonces se ve que la derivada es un verdadero cociente de $\frac{dy}{dx}$

La derivación de funciones de una variable implica pues la diferenciación de la misma.

2.—DIFERENCIACION DE FUNCIONES COMPUESTAS.

Sea $y = f(u)$ siendo $u = \varphi(x)$

la regla de derivación es $\frac{d_x y}{dx} = \frac{d_u y}{du} \cdot \frac{d_x u}{dx}$ pero importa observar el diverso significado de las dos diferenciales de u que aquí figuran mientras du es un incremento arbitrario de u $d_x u$ designa una función de x y de dx cuyo valor es $\varphi'(x)dx$, o sea $dy = f'(u)\,\varphi'(x)\,.\,dx$. Si en la igualdad multiplicamos por dx tenemos

$$d_x y = f'(u)\,.\,d_x u \text{ es decir}$$

mientras que en fórmula que da la derivada de una función de función $y = f(u)$ se va complicando progresivamente a medida que aumenta el número de variables independientes intermedias y en cada caso es preciso tener en cuenta la variable de que inmediatamente depende la función considerada, la fórmula de la diferencial respecto de x de la función $f = f(u)$ es siempre del mismo tipo

$$dy = f'(u)du \text{ igual a } dy = f'(x)\,.\,dx$$

esta es la definición de la diferencial cuando u es la variable independiente y sustituir cuando la variable independiente es otra. Esta ventaja que no tienen las derivadas es lo que ha hecho preferir la diferencial en el cálculo infinitesimal y por esta validez general para cualquier variable independiente, se omite esta.

3.—PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL.

a) La diferencial de una constante es cero.
b) Si f y g son dos funciones derivables $\Rightarrow$ diferenciables.

$b_1)$ $d(f + g) = df + dg$ ya que

$b_2) d(f + g) = (f + g)'dx = f'dx + g'dx = df + dg$

$b_3) d(k\,.\,f) = k\,.\,df$

$$d(f\,.\,g) = (f\,.\,g)'dx = f'g\,dx + g'f\,dx =$$

$$= g\,.\,df + f\,.\,dg$$

$b_4) d(n\,.\,v\,.\,u) = v\,.\,u\,.\,dn + n\,.\,u\,.\,dv + n\,.\,v\,dn$

viene de la página anterior

Esta actitud mecanicista, determinista, nacía de aquellas observaciones sobre el universo dictadas por el sentido común y que habían contribuido ya al progreso de la ciencia.

Sin embargo, en la segunda mitad de siglo, matemáticos y físicos comenzaron a reconocer que podían concebir algunos aspectos del universo solo como fórmulas matemáticas. De estas se originaban ideas que se burlaban claramente del sentido común: que el espacio es curvo, que a veces la materia es inmaterial, que la energía posee una masa. Poco después, Werner Heisenberg y sus colegas físicos cuánticos descubrieron que, en el mundo del átomo, causa y efecto no están mecánicamente ligados; que una causa puede producir más de una consecuencia, cada una gobernada por una probabilidad; que nadie puede predecir que a un curso de acontecimientos le seguirá otro determinado, sino como probabilidad calculable.

En breve, la idea de que el universo es una máquina y la idea de que actúa en modo determinista caducaron en poco tiempo. El «principio de indeterminación de Heisenberg puede incluso haber reforzado la fundamental predilección humana por la libertad plena de acción: deja sitio al azar en la actividad de las células sexuales en las que nuestros niños son proyectados por los genes y en la de las células nerviosas donde se construye nuestra mente y se excita la fantasía. El principio

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

de Heisenberg no dice nada sobre la facultad de escoger entre las posibilidades pero, al menos, nos libera del concepto del siglo XIX de la completa determinación de nuestro destino. La derrota del sentido común en las cuestiones atómicas fue dura de aceptar para muchos científicos. Einstein mismo no se concilió nunca del todo con la idea de que las probabilidades gobiernan causa y efecto. «No puedo creer que Dios juege a los dados con el mundo», comentó indignado una vez. Hoy en día, los físicos creen que en un cierto sentido Dios juega realmente a los dados. Es decir, el universo no es una máquina, al menos en el sentido común de la palabra, y su futuro no está completamente establecido por la posición en que sus componentes se encuentran en un momento dado. Además, tras las revelaciones de los últimos años, el científico cree que su comprensión del universo esté perpetuamente abierta a la mejoría. Las opiniones actuales sobre el cosmos se basan en los últimos y mejores modelos conocidos. Modelos superiores, se afirma, aumentarán el sentido de seguridad del científico y su capacidad de predecir pero no le darán jamás certezas absolutas.

$$b_5)\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

4.—DIFERENCIALES SUCESIVAS.

Sea f una función derivable dos veces en un intervalo A:

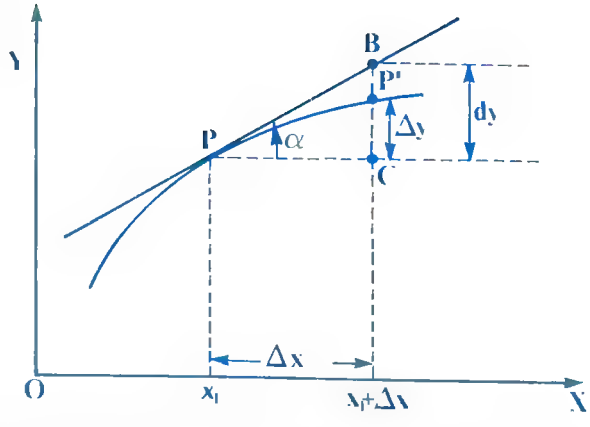
$$A \xrightarrow{\ f\ } R \qquad df = f'(x)\,.\,dx$$

Podemos diferenciar de nuevo el segundo miembro; si dx no depende de ninguna otra variable (como si por ejemplo tuviéramos $t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} f(x)$) entonces dx es constante respecto de x y su diferencial es nula, de ahí que $d(df) = d^2f = f''(x)\,.\,(dx)^2$

Análogamente si f es derivable n veces y x es variable independiente

$$\boxed{d^m f = f^{(m)}(x)\,,\,(dx)^m} \qquad m = 1, 2, \ldots n.$$

5.—INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.



PC es el incremento h de la variable P'C es el incremento de la función.

$$PC = h = \Delta x \qquad P'C = f(x_1 + h) - f(x_1) = \Delta f = \Delta$$

Así tendremos que:

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{BC}{PC} = f'(x_1)$$

$$f'(x_1) = \frac{BC}{h} = f'(x_1)$$

o sea: $$BC = df = f'(x_1)\cdot h$$

$$\Delta f = P'C = CB + P'B = \text{tag}\ \alpha\,.\,PC + P'B =$$

$$= f'(x_1)\,.\,h + P'B$$

Así pues $\triangle f = df + P'B$

O sea $BC = df$

$P'B = \epsilon(x) \cdot h$

Resulta que la interpretación geométrica de la diferencial de una función en un punto representa el incremento correspondiente de la tangente a la curva en dicho punto y no a un $\triangle f$ de la variable dependiente

6.— APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL.

En las aplicaciones se supondrá que las diferenciales son infinitésimas (cantidades suficientemente pequeñas) lo que conduce a decir que la diferencial (dy) es un infinitésimo equivalente al incremento ($\triangle y$) correspondiente al incremento dx de la variable.

$$\frac{\triangle y}{dy} \to 1 \text{ cuando } dx \to 0$$

(menos en los puntos donde $f'(x) = 0$) ya que en estos casos la diferencial no representa la parte principal del incremento.

En numerosas circunstancias podrá calcularse dy por medio de $\triangle y$ con una aproximación de segundo orden.

Ejemplo

Sea una esfera de radio variable r, calcúlese la diferencial dV de su volumen.

Solución

1er Método. El volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

si diferenciamos:

$$dV = 4\pi r^2 \, dr$$

2.º Método. Sabemos que dV representa la parte principal del incremento de V. Si se considera un pequeño elemento de área σ de la esfera y el cono que tiene por vértice el centro de la esfera y cuyas generatrices se apoyan sobre el contorno de σ, dicho cono limita una pequeña porción v de $\triangle V$. El volumen de v es equivalente al de un pequeño cilindro de base σ y altura dr. Efectuada la suma:

$$dV = \Sigma \, \sigma \, dr = 4 \, \pi r^2 \, dr$$

Ejemplo

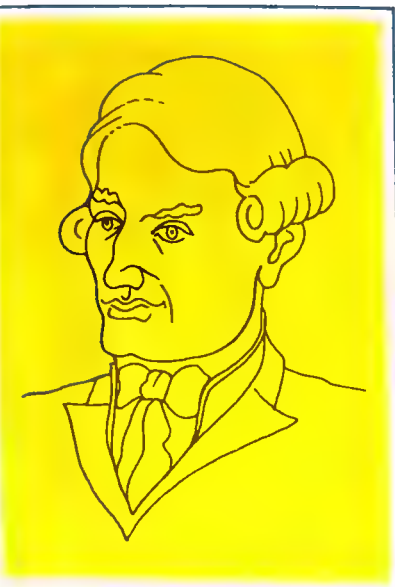
Un punto M se desplaza con movimiento uniforme de velocidad v sobre el eje OX siendo su abcisa $x = vt$. Cálculese en el instante t la velocidad a la que varía la longitud AM donde A es un punto fijo de ordenada a sobre Oy.

En París se prepara una exposición de diamantes. Estos diamantes se expondrán en una conocidísima sala de la capital de Francia que además es la de más prestigio en cuanto a las medidas de seguridad. Controles electrónicos, cámaras acorazadas para guardarlas por la noche, etc...

Para más seguridad, dichos diamantes serán expuestos dentro de cajas de cristal y con tapa corrediza también de cristal y dentro de cada caja o estuche,... una víbora cuya mordedura es mortal de necesidad. Más seguridad imposible.

No contento con eso, el jefe de policía, celoso responsable de la seguridad de la sala, llamó a "Manitas", conocido ladrón de guanteblanco que pasaba una temporada de descanso en la cárcel de Marsella.

El "Manitas" cuando llegó a la sala y vio las medidas de seguridad, dijo que aquello eran tan fácil, que él se comprometía a robarlas y además de día. Para demostrarlo pidió que lo dejaran solo durante... un minuto. Al cabo del cual salió con los diamantes ¿cómo lo hizo? Si no lo habeis descubierto tendreis que mirar la página núm. **1280**



BARON AGUSTIN DE CAUCHY

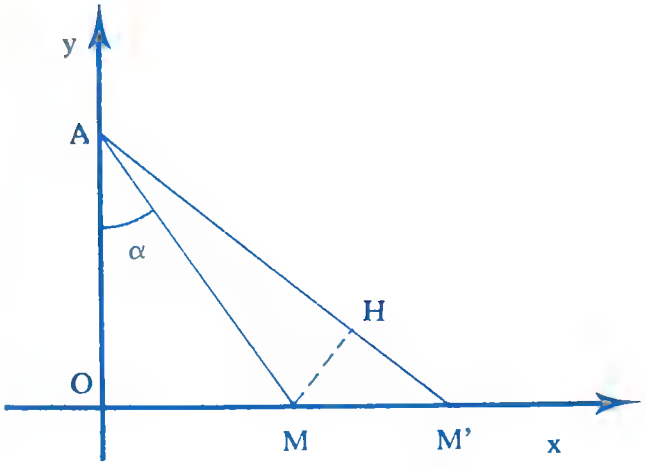
GRAN matemático francés. Nació en París en 1789 y falleció en 1857. En 1816 ganó la cátedra de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de París. Inquieto, viajero e inconformista, le llevó también a reseñar en el Colegio de Francia y en la Escuela Politécnica al mismo tiempo.

En 1830 marchó a Turín donde enseñó Matemáticas en la Facultad de Ciencias hasta 1836. En este mismo año viajó a Praga para enseñar Matemáticas en la Escuela Politécnica. Cuando le ofrecieron la cátedra, renunció a ella regresando a París en 1838. Le costó diez años ser nombrado profesor de la Facultad de Ciencias, cátedra que ocupó hasta 1852.

El 2 de diciembre de ese año se negó a prestar juramento al Gobierno que dio el golpe de Estado, lo que le hizo perder la titularidad de dicha cátedra. En 1854 pudo reintegrarse a la misma sin ser obligado al juramento.

Es famosa su frase de «Lo menos político del mundo son las matemáticas».

Hizo los más diversos trabajos en las ramas de las ciencias, tanto en análisis algebraicas, como en las funciones analíticas; descubrió métodos rigurosos con vigente actualidad en nuestros días.



$$d(AM) = AM' - AM = M'H = MM' \operatorname{sen}\alpha = dx \operatorname{sen}\alpha$$

$$\text{luego} \quad \frac{d\,AM}{dt} = \frac{dx \operatorname{sen}\alpha}{dt} = v \operatorname{sen}\alpha$$

6.1.—Aplicación a máximos y mínimos

Se sabe que los valores que hacen máximo o mínimo una función f(x) derivable deben buscarse entre las raíces de la ecuación f'(x) = 0 (aunque puede haber un entorno en un punto donde la función no sea derivable).

Esto equivale a anular la diferencial

$$df = f'(x)\,dx = 0$$

ya que como x es la variable independiente se tiene que

$$dx \neq 0$$

Sin embargo, en el caso de una función de función

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(x)$$

las condiciones $y_u = 0$ y $dy = 0$ no son equivalentes, se obtienen todos los extremos anulando la diferencial. El empleo de la condición $df = 0$ permite elegir una variable cualquiera.

Ejemplo

En una elipse, hallar dos diametros conjugados cuya suma de longitudes sea máxima o mínima.

Solución

Se toma como variable la longitud ℓ de uno de los diámetros. El otro ℓ' es tal que:

$$\ell^2 + \ell'^2 = a^2 + b^2$$

y la cantidad a estudiar es:

$$A = \ell + \sqrt{a^2 + b^2 - \ell^2}$$

$$dA = \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{a^2+b^2-\ell^2}}\right) d\ell = 0 \begin{cases} 1 - \dfrac{\ell}{\sqrt{a^2+b^2-\ell^2}} = 0 \\ d\ell = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2+b^2-\ell^2} = \ell \qquad \ell^2 = \ell'^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

$d\ell = 0$ de los ejes de la elipse.

6.2.—Error absoluto de una función y = f(x)

El error absoluto es la diferencia en valor absoluto entre el verdadero valor V y el aproximado A

$$E = |V - A|$$

En realidad el valor de V no puede darse exactamente, sino sólo de modo aproximado dada la imperfección de los instrumentos de medida. Sin embargo podemos conocer el límite o cota de error.

Podemos tomar el valor dx la diferencial de la función en un punto como un valor aproximado por exceso si es conexa o por defecto si es cóncava suponiendo dx suficientemente pequeño en comparación con x.

6.3.—Diferencial logarítmica de una función Error relativo

Llamamos diferencial logarítmica de una función y = f(x) a la diferencial de su logaritmo neperiano.

Para calcularla, habrá que realizar dos pasos:

a) $Ly = L\, f(x)$
b) $d\, Ly = d\, L\, f(x)$

$$d\, Ly = D(Ly) \cdot dx = \frac{y'}{y}\, dx = \frac{dy}{y}$$

$$d[L\, f(x)] = D[L\, f(x)]\, dx = \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \frac{df(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d\, f(x)}{f(x)} = \frac{dy}{y}$$

Error relativo de una función

El error absoluto no nos da una idea clara de la aproximación con que ha sido ejecutada una medida. Recurrimos al error relativo para que nos dé una idea clara de la aproximación con que realizamos nuestras medidas.

$$e = \frac{E}{V} = \frac{|V - A|}{V}$$

Las aportaciones de la cultura oriental hacia la occidental son de gran importancia en todos los campos incluido, por supuesto, las matemáticas.

Aunque se han perdido las obras del matemático Tsou Tch'ong-Tche se sabe por otras obras históricas que calculó dos valores de p: por exceso 3.1415927 y 3.1415926 por defecto.

Es curiosa la forma de nombrar los decimales en el año 635 ya que se referían a medidas de longitud en sistema decimal: pies, pulgada, líneas, feu, li, nao, unao y hou. En cambio en el 660 sólo se indicaban las unidades y las centenas tal y como expresa el resultado de Ts'ao Che-Wei en el cálculo de un problema de calendario: 365 yu 24 Kl 48.

Más adelante se introdujo el uso de la palabra touan para separar cifras enteras y decimales de la mano de Han Yen a finales del siglo VII.

Es también importante el empleo de la cifra cero que no aparece hasta el siglo VIII tal y como reflejan las obras de K'in-T'an S'i'-Ta sobre astrología basadas en los procedimientos de cálculo indios.

Mujiks es una expresión rusa que designa a los campesinos y significa "hombrecillo" por la diferenciación social que en Rusia se hacía durante los siglos X al XII entre guerreros y hombres del campo.

Incluso entre los mujiks había diferencias pues unos trabajaban tierras del príncipe, poseían sus propios aperos y eran libres en tanto que los que trabajaban tierras de particulares dependían en todo de su señor. Tras los ataques mongoles, los campesinos que se habían refugiado en los bosques reivindicaron sus servicios mediante contratos. Pero esta situación no duró mucho y pronto la necesidad de soldados y los exigentes propietarios provocaron una despoblación del sector agrícola. Las quejas de los propietarios llevaron a tomar medidas de fuerza a Iván el Terrible que prohibía el abandono de sus amos a los mujiks. Romanov empeoró aún más la situación al permitir la venta de campesinos e iniciando una época de servidumbre y revueltas campesinas. El código de Romanov no fue modificado durante un siglo pese a las protestas campesinas por la presión que ejercían los nobles en el poder monafquico. Alejandro II acabó con la servidumbre con la solución de que los campesinos pudieran comprar tierras en veinte años o bien recibir gratuitamente una parte de ellos. Ambas posibilidades perjudicaron al campesinado que no vio mejorar su situación ni su miseria hasta la revolución.

Para el caso de funciones una aproximación del error relativo viene dada por $e = \frac{dy}{y}$, que es la diferencial logarítmica de la función, cuando dx es suficientemente pequeña. De acuerdo con la definición de diferencial logarítmica:

1) el error relativo de un producto es igual a la suma de los errores relativos de los factores.
2) el error relativo de un cociente es igual a la diferencia entre los errores relativos del dividendo y del divisor.
3) el error relativo de una potencia es igual al producto del exponente por el error relativo de la base.

PROBLEMAS

1.—Sea g(x) una función definida y diferenciable dos veces para $x \leq x_0$

¿Como elegir los coeficientes a, b, c para que la función,

$$F(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \leq x_0 \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c \text{ si } x > x_0 \end{cases}$$

sea diferenciable dos veces para todo $x \in R$?

Solución

a) Si $x < x_0$ $\quad d^2F = d^2g = g''(x)$
b) Si $x > x_0$ $\quad d^2F = 2a$
c) Si $x = x_0$

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c - c}{x - x_0}$$

$$= g'(x_0)$$

ya que como F(x) debe ser continua en x_0.

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = c = g(x_0)$$

al ser continua g(x)

Así pues $g(x_0) = c$

y $\quad g'(x_0) = b$

En cuanto a la 2ª derivada

$$F''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2a(x - x_0) + b - b}{x - x_0} = g''(x_0)$$

por tanto $g''(x_0) = 2a$

Con lo cual quedan fijadas las condiciones.

2.— Derívese $y = Lx$ respecto de $u = e^{senx}$

Solución

$$dy = \frac{dx}{x}\, du = e^{senx} \cos x\, dx$$

de donde:

$$y'_u = \frac{dy}{du} = \frac{1}{x \cos x} e^{-senx}$$

3.— En un triángulo en el cuál a y A son constantes, pruébese que:

$$\frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$$

Solución

El área del triángulo depende de un parámetro que no hace falta precisar. En las relaciones

$$b = 2R \text{ sen } B$$
$$a = 2R \text{ sen } C$$

por ejemplo el radio R del círculo circunscrito es constante. Por esta razón se tienen:

$$db = 2R \cos B\, dB$$
$$dc = 2R \cos C\, dC$$

y como $B + C = R - A$ $\qquad dB + dC = 0$

resulta $\qquad \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$

Se conoce con el nombre de urbanidad y cortesía el conjunto de costumbres de la vida en sociedad, basadas en el respeto a los demás.

El conjunto de normas de urbanidad y cortesía varía según los años y los lugares. Así en la Edad Media nadie se extrañaba de que los caballeros más nobles se sirvieran metiendo la mano en las fuentes. Sin embargo en un Tratado de cortesía, publicado en 1480 se les recomendaba que no usaran más de tres dedos.

En las Siete Partidas de Alfonso X el Sabio se recomienda a los mozos que coman y beban limpiamente, deben lavarse las manos antes de comer y limpiarlas en las toallas.

En cambio a las damas, antes de beber debían limpiarse bien la boca, ya que si no se ven luego manchas que flotan en las copas, consejos que siguen siendo útiles en pleno siglo XX.

En muchos países orientales, al terminar la comida debe eructarse para expresar al anfitrión la abundancia y calidad de los platos.

Para ser siempre correctos bastará con seguir las siguientes normas:
No hacar que los demás padezcan el molesto estado de desaliño y suciedad, no producir ruidos inútiles que molesten a los vecinos, en la mesa no ocupar los primeros puestos, no servirse antes que los demás, no escoger los mejores trozos, mostrarse cortés con todo el mundo y respetar las prácticas y costumbres en uso.

TEMA 39

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCION. EXTREMOS

INDICE

1.—FORMULA DE APROXIMACION DE TAYLOR.
2.—FORMULA DE APROXIMACION DE MAC-LAURIN.
3.—CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.
  3.1.—Definición.
  3.2.—Criterios.
4.—MAXIMOS Y MINIMOS.
  4.1.—Extremos absolutos y relativos.
  4.2.—Discusión de máximos y mínimos.
  4.3.—Condiciones suficientes de máximo y mínimo.
  4.4.—Problemas.
5.—APROXIMACION LINEAL. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

TEMA 39

6.—REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES.

6.1.—Intervalo de existencia.

6.2.—Corte con los ejes.

6.3.—Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

6.4.—Máximos y mínimos y Puntos de inflexión.

6.5.—Asíntotas.

6.6.—Representación gráfica de una función.

7.—ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CURVA

7.1.—Ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto perteneciente a ella

7.2.—Ecuación de la tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella.

7.3.—Tangente de elipse en un punto interior a ella

7.4.—Tangente a la elipse desde un punto exterior a ella

7.5.—Ecuación de la tangente y la normal a una hiperbola en un punto interior.

7.6.—Tangente a una hiperbola desde un punto exterior.

7.7.—Ecuación de la tangente y de la normal a la parábola en un punto.

7.8.—Tangente a la parábola desde un punto exterior.

TEMA 39

Tras una era glaciar comienza en Eurasia el mesolítico que comprende unos cuatro mil años. El nuevo clima favoreció la aparición de bosques y praderas en zonas más templadas y de zonas desérticas en latitudes tropicales. El reno, animal fundamental para el hombre de la era, desaparece y es sustituido por el ciervo del cuál obtiene la piel, la carne, las astas y tendones. Aunque no fue una época pródiga en avances técnicos los materiales anteriores y la diversificación tipológica del hombre primitivo permitió que individuos braquicéfalos poco numerosos construyeran utillajes de pesca y utensilios con cierta geometría. También el hombre abandonando las cavernas construyó poblados de cabañas en zonas ribereñas y se dedica no sólo a cazar sino también a cuidar ovejas y cerdos y a la recolección de marisco y algunos vegetales.

Tenemos pocos restos humanos de este período pero se han encontrado restos en Baviera, Palestina, Francia y Portugal los cuales muestran una corta talla: 1,60 m. en el hombre.

También puede observarse una distribución racial en Europa y sobre todo una diferenciación del tipo mediterráneo dolicocéfalo armónico que era además de un nivel más avanzado junto con los pueblos orientales.

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCION.— EXTREMOS

1.—FORMULA DE APROXIMACION DE TAYLOR

Polinomios de Taylor

Dado el polinomio P(x) de grado n y un $x = x_0$ queremos ordenarlo en potencias de $(x - x_0)$:

$$P(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

es decir, tenemos que calcular los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ pero no lo haremos aplicando las divisiones sucesivas de la Regla de Ruffini sino por derivación.

Los coeficientes se determinan del siguiente modo:

$$P(x_0) = a_0$$

derivamos el polinomio.

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3\, a_3\, (x-x_0)^2 + \ldots + n\, a_n\, (x-x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)\, a_n\, (x-x_0)^{n-2}$$

. . . . . .

$$P^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\, a_{n-1} + n(n-1(n-2) \ldots \ldots$$
$$\ldots 3.2.1\, a_n\, (x-x_0)$$

$$P^{(n)}(x) = n!\, a_n$$

Si lo particularizamos en el punto x_0 tenemos:

$$P'(x_0) = a_1$$

$$P''(x_0) = 2!\, a_2$$

$$P'''(x_0) = 3!\, a_3$$

. . . . . .

$$P^{(n-1)}(x_0) = (n-1)!\, a_{n-1}$$

$$P^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$$

Despejando en cada una de estas expresiones obtendremos los coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= P'(x_0) \\ a_2 &= \frac{P''(x_0)}{2!} \\ a_3 &= \frac{P'''(x_0)}{3!} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= \frac{P^{(n-1}(x_0)}{(n-1)!} \\ a_n &= \frac{P^{(n}(x_0)}{n!} \end{aligned}\right\}$$

Entonces podemos escribir el polinomio (x) en función de las derivadas en el punto x_0 y potencias de $(x - x_0)$:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{P^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{P^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Para una función f(x) que es n veces derivable en x_0, llamamos polinomio de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Fórmula de aproximación de Taylor

Consideremos la función f(x) n veces derivable en x_0 donde $f^{(n+1} \neq 0$, expresamos el polinomio de Taylor para dicha función en ese punto:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Si tenemos un punto b que pertenece a un entorno $E(x_0)$ calculamos T_n que es el error $f(b) - f_n(b)$. Sustituimos x_0 por x:

$$T_n(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) -$$

$$- \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \ldots - \frac{f^{(n}(x)}{n!}(b - x)^n]$$

PITAGORICOS

Se llaman pitagóricos a los integrantes de la escuela fundada por Pitágoras, filósofo que vivió a lo largo del siglo VI a. C., y cuyas vidas han sido deformadas por el misticismo y el silencio impuesto por Pitágoras sobre todo en lo referente a conocimientos nuevos. En la escuela pitagórica no sólo se desarrolló ciencia matemática, sino también filosofía, política, música, etc. Se atribuye a Pitágoras la relación simple que existe entre las longitudes de las cuerdas de la lira y los acordes y sonidos emitidos por sus vibraciones así cuando la longitud (½) se obtenía la octava, si las relaciones eran: 3:4, ó 2:3 se obtenían la cuarta y la quinta. En estas relaciones aparecen los cuatro primeros dígitos 1, 2, 3, 4 que su suma es 10, número místico con propiedades geométricas, etc. que convirtió a esta combinación de sonidos y números en «esencia de todas las cosas».

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Según refiere San Hipólito en el siglo III, en la secta pitagórica se distinguían en novicios e iniciados. Los novicios sólo podían escuchar y callar, mientras que los segundos podían expresar lo que pensaban acerca de las cuestiones científicas.

Los pitagóricos distinguían en la matemática cuatro ramas: la aritmética, la geometría, la música y la astronomía.

La secta descubrió, estudiando un caso particular del teorema de Pitágoras, los números irracionales, es decir números cuya razón no resulta expresable mediante números enteros ni fraccionarios. Sin embargo al considerar el número como esencia de todas las cosas, la existencia de este tipo de números resultaba desconcertante por lo que decidieron ocultar su descubrimiento.

Las contribuciones de esta secta a la ciencia son más bien de tipo geométrico resultando las contribuciones artiméticas más bien pobres y escasas, debido a que el descubrimiento de los irracionales les cerraba el paso a nuevos conocimientos.

Por lo tanto derivando el término complementario:

$$T'_n(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)\ f''(x) +$$

$$+ \frac{2(b-x)}{2} f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) + \ldots +$$

$$+ \frac{n(b-x)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

$$T'_n(x) = \frac{-(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

si tenemos la función $g(x) = (b - x)^{n+1}$ y $T_n(x)$ podemos aplicar Cauchy en el intervalo (x, b) ya que se anulan en los extremos del intervalo.

$$\frac{T_n(b) - T_n(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{T'(\alpha)}{g'(\alpha)} \qquad x < \alpha < b$$

donde $g'(x) = -(n + 1) \cdot (b - x)^n$

$$\frac{-T_n(x)}{-(b-x)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$$

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (b - x)^{n+1}$$

Término complementario de Lagrange.

para $x = x_0$

$$T_n = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (b - x_0)^{n+1} = f(b) - f_n(b)$$

entonces:

$$f(b) = f(x_0) + (b - x_0) f'(x_0) +$$

$$+ \frac{(b - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(b - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}$$

Que es la fórmula de Taylor con el término complementario de Lagrange.

Otros restos ó términos complementarios serían:

$$T'_n = \frac{b - x_o}{n!}(b - \xi)\, f^{(n+1)}(\xi)$$ Resto de Cauchy

siendo $x_o < \xi < b$

$$T_n = \frac{(b - x_o)}{pn!}(b - \xi)^{n+1-p} f^{(n+1)}(\xi)$$, siendo $x_o < \xi < b$

Resto de Schlömilch

$$T_n(a, b) = \frac{1}{n!}\int_a^b (b - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$. Resto integral

Otra forma sería $\forall x$ de un entorno de x_o y con el término complementario de Lagrange:

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o)f'(x_o) + \frac{(x - x_o)^2}{2!}$$

$$f''(x_o) + \ldots + \frac{(x - x_o)^n}{n!} f^n(x_o) + \frac{(x - x_o)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

si ponemos $x = x_o + h$

$$f(x_o + h) = f(x_o) + h\, f'(x_o) + \frac{h^2}{2!} f''(x_o) +$$

$$+ \frac{f^n(x_o)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_o + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

con el Resto de Lagrange

siendo $0 < \theta < 1$

2.—FORMULA DE APROXIMACION DE MAC-LAURIN

Estudiando el entorno de 0.

tomemos $x_o = 0$ $\quad h = x$ en la fórmula de Taylor, con lo que

$$f(x) = f(o) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+a}(\theta\, x)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ con } 0 < \theta < 1$$

que es la fórmula de MacLaurin con el resto de Lagrange.

Tenochtitlan es la ciudad azteca sobre la que se ha construído la actual ciudad de México capital de los Estados Unidos Mexicanos y del Distrito Federal.

La primitiva ciudad estaba rodeada de jardines flotantes: chinampas y unida a tierra por cuatro calzadas y surcada por canales que confluían en la plaza mayor donde se encuentran templos: Neocalli, y el edificio del Elanitecpan.

En otra gran plaza se centraba un comercio cuya moneda eran los granos de cacao y además se situaba el templo de Muitzilopactli y la gran pirámide.

Las construcciones no eran uniformes y frente a edificios fortificados como templos o casas principales en las chinanpas se levantaban chozas de lodo y paja desprotegidas frente a inundaciones.

Sus canales, la belleza de sus edificios, sus calles rectilíneas y sus plazas la hicieron ser comparada con Venecia.

La ciudad de Tenochtitlan se asentaba en un islote del lago Texcoco y estaba perfectamente comunicada y abastecida. Sus servicios sanitarios eran admirables y los acueductos de Chapultepec y Coyoacán garantizaban el suministro de agua en tanto que un dique evitaba el desbordamiento.

Tan hermosa ciudad fue fundada en 1325 por los aztecas tras recorrer el Altiplano y según cuenta la leyenda allí donde vieron los sacerdotes a un águila sobre un nepal devorando a una serpiente tal y como aparece en el escudo.

El artista que realiza estos trabajos desarrolla un gran sentido estético, una gran imaginación y una minuciosidad y paciencia asombrosas.

Las técnicas de tan bello trabajo se practican desde antiguo tal y como podemos ver en los mosaicos mesopotámicos en el templo de Uruk.

Hay dos métodos principales: directo y al cartón.

El método directo consiste en practicar un hueco en la pared al decorar y verter en él yeso que ocupa en capa regular la cavidad. Sobre el yeso se realiza el dibujo reproduciendo líneas y colores con exactitud y se recorta en trocitos que son sustituidos por los pedacitos del material ordenado que son después embutidos con masilla al aceite o cemento de cal.

El método al cartón consiste en realizar el dibujo del modelo sobre cartón y colorear sobre éste los trocitos del material que son pegados por su cara exterior al cartón. Cuando se ha finalizado se embute el conjunto por su reverso en el cemento quedando adherido a la pared. Bastará con separar el cartón cuando el cemento haya fraguado para concluir el mosaico.

Los materiales empleados en esta labor son mármol, esmalte, arcilla, cerámica o barro en general o minerales preciosos como ónice y turquesas en algunos mosaicos aztecas.

3.—CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EN UN PUNTO

3.1.—Definición

Se dice que $y(x)$ es **creciente** en el punto x_0 cuando en un cierto entorno de x_0 se verifica que $y(x_0)$ es mayor o igual que los valores de $y(x)$ a la izquierda de x_0 y menor o igual que los valores de $y(x)$ a la derecha de x_0.

Si por el contrario $y(x_0)$ es menor o igual que los valores de $y(x)$ a la izquierda y mayor o igual que los valores de $y(x)$ a la derecha en un cierto entorno de x_0 diremos que esta función es *decreciente* en x_0.

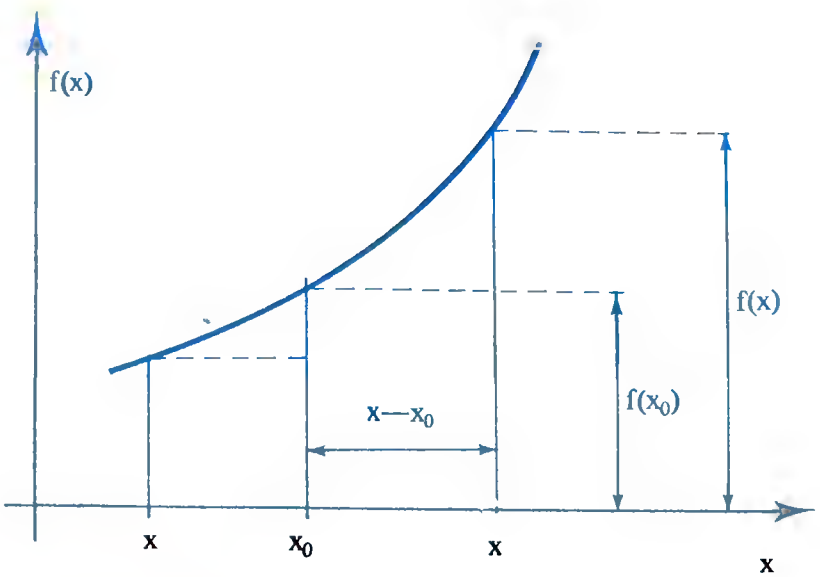
Si $y(x_0)$ es igual o mayor que los valores de $y(x)$ a la izquierda y a la derecha de x_0 se dice que $y(x_0)$ es un ***máximo relativo*** de la función. Si $y(x_0)$ es igual o menor que los valores a ambos lados de x_0, $y(x_0)$ es un ***mínimo relativo***.

Cuando los signos $\leq$ (menor o igual) y $\geq$ (mayor o igual) sean $<$ (menor) o $>$ (mayor) diremos que el crecimiento, decrecimiento, máximo o mínimo ***son estrictos***. Los máximos y mínimos reciben el nombre conjunto de extremos bien absolutos o relativos.

3.2.—Criterios

Una función cuya derivada no se anula en el punto x_0 es creciente o decreciente en él en sentido estricto según que la derivada sea positiva o negativa

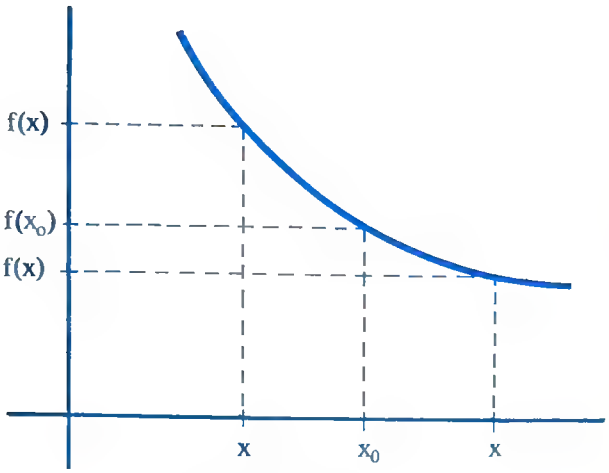
$$y' = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Creciente

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) > 0 \\ x - x_0 > 0 \end{array}\right\} \quad y' > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) < 0 \\ x - x_0 < 0 \end{array}\right\} \quad y' > 0$$



Decreciente

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) < 0 \\ x - x_0 > 0 \end{array}\right\} \; y' < 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) > 0 \\ x - x_0 < 0 \end{array}\right\} \; y' < 0$$

La condición $y'(x_0) > 0$ es suficiente para asegurar el crecimiento aunque la función derivada sea discontinua y tome valores negativos y nulos en todo entorno de x_0.

4.—MAXIMOS Y MINIMOS

4.1.—Extremos absolutos y relativos

Los máximos relativos de una función son mayores que los otros valores de la misma en un cierto entorno cuya amplitud es distinta en cada caso, pero no deben confundirse con el máximo absoluto en [a, b].

En todo intervalo cerrado dada y(x) es continua, existe un máximo y un mínimo absolutos, en cambio pueden no existir máximos y mínimos relativos. Sin embargo si el máximo o el mínimo absoluto lo alcanza una función en un punto interior al intervalo y no en los extremos ese valor es también máximo o mínimo relativos.

La determinación de extremos absolutos se reduce al cálculo de los extremos relativos a condición de examinar además los valores y(a) e y(b) y los puntos donde no haya derivada.

4.2.—Discusión de máximos y mínimos

1) Método directo para calcular extremos

Estudiando el crecimiento y decrecimiento

2) Máximos y mínimos de funciones derivables.

Si la función tiene en x_0 un máximo o mínimo relativo y la derivada en este punto x_0 existe y es finita debe ser *nula*, puesto que si fuera positiva o negativa la función sería creciente o decreciente en x_0.

El Instituto oceanográfico tiene como finalidad la enseñanza con sede en París y la investigación y exposición en un museo de Mónaco.

En este museo se reúnen las especies y piezas de interés científico de modo que las dependencias reúnen acuarios, laboratorios y despachos para el uso científico y por otro lado una exposición de plantas y animales marinos junto con el instrumental y aparejos relacionados con las tareas relacionadas con el mar.

El organismo como tal fue fundado por Alberto I de Mónaco en 1906 pero el museo fue inaugurado en 1910 en un precioso edificio sobre la misma costa marítima.

Director desde 1957 el oceanógrafo Costeau destacado científico y especialista en la materia.

El trabajo desarrollado en la docencia por el Instituto comprende disciplinas como fisiología de los habitantes de mar, biología oceanográfica y oceanografía física impartidas por excelentes profesores. Además el Instituto publica revistas como los Anales, Boletín del Instituto oceanográfico y resultados de las campañas científicas del príncipe Alberto.

Este organismo es independiente del estado y es regido por un Consejo.

Parece que el primer soberano coronado fue Constantino el Grande, que fue coronado en Constantinopla. Poco después esta costumbre fue extendiéndose a todos los emperadores de oriente y los demás pueblos germánicos.

Hasta Leovigildo la exaltación del nuevo monarca consistía en la elevación al trono y el juramento del rey. A partir de Recaredo se estableció la coronación del monarca según los ritos del Antiguo Testamento.

Los reyes de Asturias , Castilla y León fueron también coronados. En Castilla, la ceremonia se realizaba en alguna iglesia o catedral y el rey era coronado por el arzobispo de Toledo. El último rey de Castilla coronado fue Juan I. En adelante la elevación a la dignidad real se hizo en Castilla por aclamación en todas las ciudades del reino.

En Aragón los reyes fueron siempre coronados, sin embargo a partir de Pedro el Católico los monarcas aragoneses en señal de independencia de la Iglesia, se coronaban a sí mismos, y luego tomaban también el cetro y el pomo de oro y coronaban a la reina.

Si la función y(x) admite derivada finita en el punto x_o es condición necesaria para que en el tenga un máximo o mínimo relativo que sea $y'(x_o) = 0$.

Que esta condición de anulación de la derivada no es suficiente para la existencia de máximo o mínimo se ve por ejemplo en la función $y = x^3$ cuya derivada $y' = 3x^2$ se anula en $x = 0$ y sin embargo es creciente en él.

Obsérvese que la condición $y'(x_o) = 0$ se refiere sólo a funciones que admitan derivada única y finita en dicho punto, si la derivada es $+\infty$ ya hemos visto que es creciente y si es $-\infty$ decreciente. Si es $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha hay un máximo relativo y en caso contrario mínimo relativo. Puede suceder que y(x) sea máximo o mínimo en algún punto donde no tenga derivada y sea necesario aplicar el método general.

4.3.—Condiciones suficientes de máximo y mínimo

Obtenidos los valores que anulan y'(x) se conoce si en cada uno alcanza la función máximo o mínimo o inflexión o no se presenta ningún caso de estos:

a) Viendo directamente como varía la función en el entorno de x_0.
b) Estudiando la variación de la derivada primera
c) Hallando la derivada segunda cuando exista

a) *Variación de la función*

Si para un h suficientemente pequeño $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ mínimo y si $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ máximo. Si hay cambio del signo inflexión.

b) *Variación de la derivada primera*

Si f(x) es continua y su derivada f'(x) pasa de positiva a negativa es decir si $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y es $f'(x_0) < 0$ a la derecha en un cierto entorno, la función f(x) tiene en x_o un *máximo relativo*; si la derivada pasa de negativa a positiva, la función tiene en x_o un *mínimo relativo*.

c) *Mediante la derivada segunda.*

$y''(x_o) > 0$ mínimo relativo

$y''(x_o) < 0$ máximo relativo.

4.4.—Problemas de máximos y mínimos

1. Hemos de fabricar en chapa galvanizada un recipiente cúbico para medir el agua caída de lluvia. Dicho recipiente (abierto por la parte superior, por supuesto) tiene que tener una capacidad de 128 litros ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener dicho recipiente para que la superficie y el costo sean mínimos.

Solución

1er paso — $S = 4ab + a^2$

2º paso — $V = a^2 . b = 128$ (fórmula 1)

$$b = \frac{128}{a^2}$$

$$S = 4a\,\frac{128}{a^2} + a^2 = \frac{512}{a} + a^2$$

3er paso

$$S' = -\frac{512}{a^2} + 2a$$

$$S' = 0 \quad . \quad 2a = \frac{512}{a^2},\ a^3 = \frac{512}{2} = 256$$

$$a = \sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2} = 4\sqrt[3]{2^2}$$

$$S'' = +\frac{1024}{a^3} + 2 = \frac{1024}{256} + 2 = 6 > 0$$

MINIMO

sustituimos $a = 4\sqrt[3]{4}$ en la fórmula 1 y tendremos:

$$b = \frac{128}{32\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

. y así

$$a = 4\sqrt[3]{4}\ \text{dm}$$

$$b = \frac{4}{\sqrt[3]{2}}\ \text{dm}$$

2. Tenemos que construir un marco para la puerta de la caseta del perro de 1 m² de luz. El marco de dicha puerta vale 900 pts. por metro de altura y 1000 pts. por metro de anchura. ¿Qué dimensiones tendrá el marco para que salga lo más económico?

Solución:

$$C = 900\,a + 1000\,.\,b$$

$$a\,.\,b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{a}$$

$$C = 900\,a + 1000\,.\,\frac{1}{a} = 900\,a + \frac{1000}{a}$$

Derivando

$$C' = 900 - \frac{1000}{a^2}$$

Igualando a 0 la derivada

$$900 - \frac{1000}{a^2} = 0$$

En diciembre de 1895, Wilhelm-Conrad Roentgen, profesor de física de la Universidad de Wurzburg (Alemania), estaba preocupado por un problema cuya solución sólo podía encontrarse haciendo pasar una corriente eléctrica por un tubo de vidrio del cual se desalojaba progresivamente el aire.

Roentgen descubrió entonces que esta última emite radiaciones capaces de atravesar, por ejemplo, un cartón grueso e iluminar luego una pantalla fluorescente. Estos son los rayos X, llamados también rayos de Roentgen.

Hubo que esperar hasta 1912, al cabo de dieciséis años llenos de experiencias delicadas y complicados cálculos, para adquirir la certeza de que los rayos X tenían una estructura comparable a la de las radiaciones ya conocidas. Al igual que la luz, están formados por partículas de energía llamadas fotones y una onda. Esta no se mide por metros como las ondas hertzianas, sino en diezmillonésimas de milímetro en angstroem (A°); también es más pequeña que la de los rayos rojos (8.000 A°) y la de los rayos violetas (4.000 A°), y aun más pequeña que la de los rayos ultravioleta (4.000 A°), y aun más pequeña que la de los rayos ultravioleta (4.000 A° — 144 A°), ya que su valor es siempre inferior a 1 A°, del orden de una décima, de una centésima de A° e incluso de una fracción más reducida.

Los rayos X se emiten siempre por un obstáculo contra el cual viene a chocar un flujo de electrones, es decir, de corpúsculos que son minúsculos granos de materia, portadores de una carga de electricidad negativa, expulsados de los átomos por la influencia de diversas causas. Este fenómeno se produce dentro de una ampolla que se convierte así en la lámpara de donde salen los rayos X. Está hecha de un balón de vidrio de forma ovalada o esférica, en cuyo interior se encuentra considerablemente rebajada la presión del aire, pues equivale sólo a la millonésima e incluso a la billonésima parte de la presión atmosférica. En este vacío casi absoluto se encuentran dos electrodos, el anticátodo y el cátodo, que son como las puertas de entrada y salida de la corriente eléctrica que atravesará la ampolla cuando se hayan reunido, respectivamente, en el polo positivo y el polo negativo de un generador de alta tensión cuyo voltaje es de 12.000 V., 300.000 V. y aun de mayor potencia. El anticátodo está hecho de una sencilla lámina de tungsteno dispuesta oblícuamente, y el cátodo consiste en un filamento del mismo metal que una corriente de baja tensión vuelve incandescente. Bajo la influencia de esta elevada temperatura, los átomos de tungsteno expulsan electrones que, por la diferencia de potencial de la corriente de alta tensión, se proyectan instantáneamente contra el anticátodo, que así viene a ser el origen de los rayos X, como el sol lo es de sus radiaciones.

$$900\,a^2 = 1000$$

$$a^2 = \frac{1000}{900} = 1{,}11$$

$$a = \sqrt{1{,}11} = 1{,}054 \text{ m.}$$

$$C'' = \frac{1000}{a^3} > 0 \qquad \text{mínimo}$$

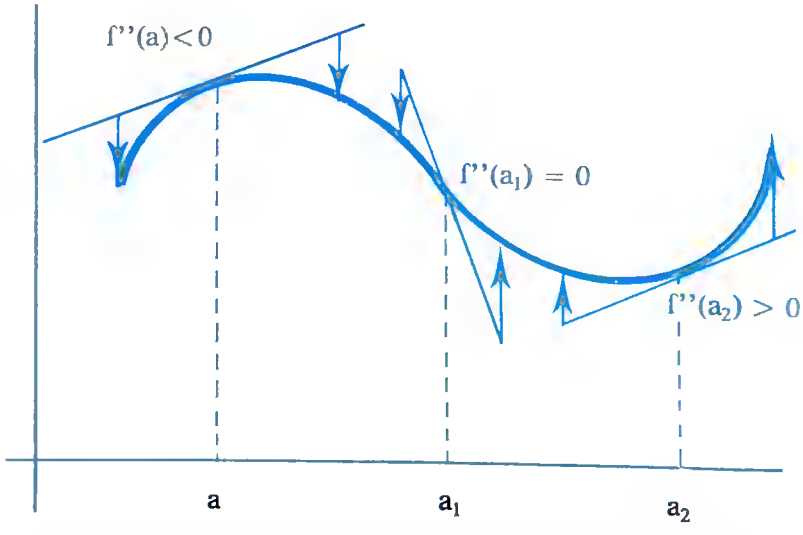
$$b = \frac{1}{a} = \frac{1}{1{,}054} = 0{,}948 \text{ m.}$$

5. APROXIMACION LINEAL

Sea una función f(x) tal que:

$$y = f(x) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{1}{2}h^2\,[f''(a + \lambda h]$$

$y = f(a) + h\,f'(a)$ es la ecuación de la tangente a f(x) en $x = a$



El error cometido viene dado por el término complementario, el cual mide exactamente la diferencia de ordenada entre la curva $y = f(x)$ y la tangente.

Este error o término complementario está representado en la figura por un flecha que indica su sentido.

Si es $f''(a) > 0$ es $T_1 > 0$, a uno y otro lado del punto en un cierto entorno, la curva se conserva en él por encima de la tangente y se dice que la concavidad se dirige hacia las «y» positivas o *concavidad.*

Si es $f''(a) < 0$ y por tanto $T_1 < 0$ en un cierto entorno la curva está debajo de la tangente, se dice que la concavidad se dirige hacia las «y» negativas o que existe *convexidad*

Si T_1 tiene signos distintos a ambos lados del punto, la curva queda atravesada por la tangente y el punto se llama de *inflexión.*

La condición necesaria pero no suficiente para tal cambio de signo es $f''(a) = 0$

En este caso de $f''(a) = 0$ no puede asegurarse nada a priori respecto del signo del término complementario que da la posición de la curva en relación a la tangente. Cuando no es fácil estudiar el cambio de signo, extendemos el desarrollo de Taylor hasta llegar a una derivada $f^{(n)}(a)$ que no se anule en el punto considerado.

$$y = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \lambda h)$$

El error o diferencia de ordenadas entre la curva y la recta tangente viene expresada por el término de grado n, el cual cambia o no de signo en el entorno de a según sea n impar o par.

En el primer caso la curva queda atravesada por la tangente y es un punto de inflexión, en el segundo caso la curva queda a un lado de la tangente por encima o por debajo de ella según $f^{(n)}(a)$ sea positivo o negativo.

La curva presenta una inflexión en un punto o queda en un cierto punto a un mismo lado de la tangente según que la 1.ª derivada no nula de orden superior primero sea de orden impar o par.

En este último caso la concavidad de la curva se dirige hacia las «y» positivas o negativas, según que el signo de la derivada no nula sea positivo o negativo.

La condición necesaria y suficiente para que una función que admite derivadas sucesivas finitas en un entorno del punto a tenga en ese punto a, un máximo o un mínimo es que la primera derivada que no se anula para $x = a$ sea de orden par; si esta derivada se hace positiva para $x = a$ tenemos un mínimo y si se hace negativa es un máximo.

9.—REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

A partir del estudio de las funciones, representarla gráficamente y con valores reales en un punto.

Intervalos de existencia y regiones

Los intervalos en que está definida la función se denominan: intervalos de existencia.

Cortes de ejes

Podemos cortar el eje de ordenadas y nos sale un sistema, siendo $y = f(x)$ y el punto en que la curva corta a dicho eje de ordenadas serán aquellos puntos en que $x = 0$ y al sustituir $x = 0$ en la función nos darán los valores de y.

CARDANO

GEROLAMO Cardano nació en Pavía en 1500 y falleció en Roma en 1576. Después de estudiar medicina en las Universidades de Pavía y Padua, se doctoró en esta última en el año 1525.

Ejerciendo la medicina en la ciudad de Milán, comenzó a aficionarse a las matemáticas. Posteriormente en Pavía sus teorías médicas cambiaron, fundamentándose en la astrología, reafirmándose sus teorías en la ciudad de Bolonia. En 1570 fue agregado al Colegio de Médicos de Roma.

Gran aficionado a la Filosofía siguió las doctrinas de Aristóteles y Averroes, considerando a las cosas como seres vivos, no admitiendo la inmortalidad del alma.

En 1545 publicó el *Ars Magna*, donde estudia la solución de ecuaciones de tercer grado, llamada «Fórmula de Cardano», aunque parece ser que dicha fórmula es debida a Tartaglia.

FORMULA DE CARDANO:

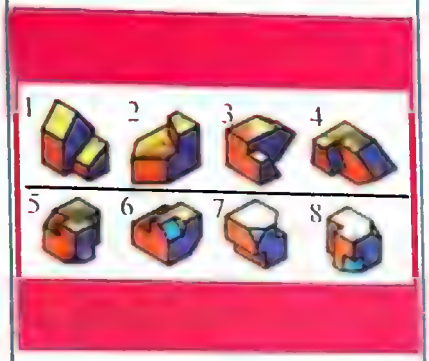
$x^3 + px + q = 0$

p, y, q son independientes de x.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

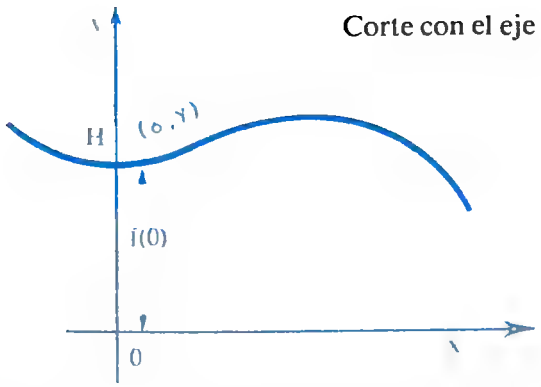
Fórmula condicional, ya que sólo sirve si en la ecuación hay dos raíces imaginarias. Si las raíces son reales, hay que recurrir a soluciones trigonométricas.

Sea x + 3y = 7x + 5y, ahora x/y = ?
(A) — 3(B) — 1/3(C)—1/9(D) 1(E)3



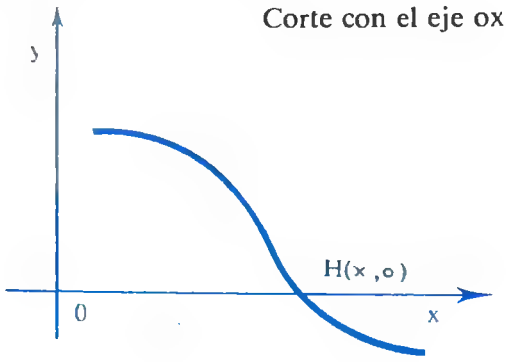
Test de aptitud, como el problema de matemáticas indicado (con cinco respuestas —entre las que escoger la exacta) y las dos cuestiones de la derecha (dos figuras son iguales en cada fila), fueron elaborados a propósito por 64 científicos de cuatro especialidades diferentes para determinar las aptitudes fundamentales entre físicos, biólogos, psicólogos y antropólogos. Los físicos del grupo estuvieron exentos de la prueba de matemáticas ya que cualquier problema escogido por los demás habría sido demasiado fácil para ellos, pero aún sin ellos el resto del grupo obtuvo una puntuación muy alta. En conjunto el grupo logró muy buenos resultados en la percepción de relaciones espaciales y excelentes en la habilidad verbal. Las respuestas exactas a los tres problemas se encuentran en la página. 1279

Corte con el eje oy



Para hallar los valores en los que la curva corta al eje x, hacemos y = 0, y hallamos los correspondientes valores de x.

Corte con el eje ox



Ejemplo:

Hallar los puntos de corte de la curva

$$v = x^2 - 9$$

Solución

Hacemos $x = 0$

$y = -9 \rightarrow$ punto de corte con el eje OY

para $y = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$

Puntos de corte con el eje OX $\begin{cases} x = +3 \\ x = -3 \end{cases}$

6.3.— Intervalos de crecimiento

Si la derivada de una función es mayor que x_o dicha función es creciente en x_0 y si la derivada es menor que 0, la función es decreciente en x_0. Entonces obtenemos los intervalos en que $\forall x$ la derivada es > 0 ó < 0.

Vamos a verlo mejor con un ejemplo:

$$y = x^2 + 6x - 3$$
$$y' = 2x + 6$$

Si $2x + 6 > 0$ $\quad x > -3$
Si $2x + 6 < 0$ $\quad x < -3$

O sea que ya tenemos los intervalos.

$-\infty < x < -3$ la función es decreciente.
$-3 < x < +\infty$ la función es creciente.

6.4.— Máximos y mínimos

Para realizar el cálculo de máximos y mínimos no tenemos más que resolver la ecuación $f'(x) = 0$ y nos da una solución de la ecuación en x_0 y al ver la ecuación $f''(x_0)$, entonces podemos tener que:

$f''(x_0) > 0$ entonces *$(x_0, f(x_0))$ es mínimo'*
$f''(x_0) < 0$ entonces *$(x_0, f(x_0))$ es máximo*

En el ejemplo anterior $y'' = 2 > 0$ mínimo, luego para $x = -3$ mínimo.

6.5.— Intervalos de concavidad y convexidad

Una función es convexa en un intervalo A , cuando la tangente queda por encima de la curva de la gráfica, y una función es cóncava en el intervalo, cuando la tangente queda por debajo de la curva de la gráfica.

Si la función f es convexa su derivada f' es también creciente; si la función f es cóncava, su derivada f' es decreciente.

Para calcular cuando f' es creciente o decreciente tenemos que calcular su derivada f''. Si $f''(x)$ es mayor que 0, f' es creciente en A y por lo tanto convexa. Si $f''(x)$ es menor que 0, f' es decreciente en A y por lo tanto cóncava.

Estudiemos un ejemplo:

Sea la función vamos a calcular

$f(x) = x^2 - 8x + 3.$
$f'(x) = 2x - 8$
$f''(x) = 2$

Entonces tenemos $f''(x) > 0$ por lo tanto la función es cóncava. para $\forall x$

Veamos ahora $\quad f(x) = -6x^2 + 5x + 4$
$f'(x) = -12x + 5$
$f''(x) = -12$

Entonces $f''(x) < 0$ por lo tanto la función es convexa.

6.6.— Asíntotas de una curva

En la función f(x) tenemos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ entonces la curva contiene al punto (a, ∞), si el $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ $= b$, entonces la curva contiene al punto (∞, b).

y también puede ocurrir $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, entonces la curva

Los mercantes de civilizaciones antiguas, cualquiera que fuese el sistema empleado para contar, usaban probablemente montoncitos de piedras para representar los diversos números; de este método deriva probablemente el ábaco, un instrumento para contar empleado normalmente todavía hoy en las tiendas existentes desde Teherán a Hong-Kong. Es probable que el ábaco iniciase su vida como una especie de plato de póker en el que un cierto tipo de piedra representaba 1, otro tipo representaba 10 y otro tipo aún 100. A continuación, los diversos tipos de ábaco se perfeccionaron y algunos fueron organizados mecánicamente: la piedra que representaba 1 se hacía correr sobre un palillo, la del 10 sobre otro y las de 100 y 1.000 sobre un tercero y un cuarto. Moviendo estas piedrecitas arriba y abajo por los palillos, los comerciantes de aquel tiempo eran capaces de sumar y restar más velozmente que personas con la ayuda de lápiz y papel hasta tal punto que el notable empleo de este instrumento retrasó, probablemente el perfeccionamiento de los números escritos.

Del desarrollo de anotaciones escritas tomaron vida las modernas ideas de aritmética y álgebra. Uno de los sistemas más toscos de representar números es el que nos llega con las cifras romanas I, II, III, IV, V, VI y así sucesivamente, que sustancialmente es una técnica de escribir números añadiendo a sutrayendo pocos símbolos fundamentales.

continua en la página siguiente

viene de la página anterior

Los símbolos actualmente empleados para escribir los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, parece que fuesen inventados por los hindúes y proyectados para emplearse en un sistema numérico en base diez o «decimal» hombre derivado de la palabra latina *décima* con la que se indicaba una tasa que ascendía justamente a un décimo. El modo en que disponemos juntas estas cifras, aparentemente bastante simple, es en realidad el ingenioso resultado de siglos de perfeccionamiento y es definido por los matemáticos «anotación de posición». En este sistema, de hecho, es la posición de cada cifra en un número lo que decide su valor. Los números mayores de la unidad son separados de los números menores (las fracciones) mediante una coma; a la izquierda de la coma, la primera cifra tiene su propio valor, la cifra siguiente vale 10 veces su valor, la próxima vale 100 veces su valor, la que sigue 1.000 veces su valor y así sucesivamente. A la derecha de la coma, la primera cifra vale $\frac{1}{10}$ de su valor, la segunda 1/100 de su valor, la tercera 1/1.000 su valor y así sucesivamente. El número 8765,4321 por ejemplo, significa:

continúa en la página siguiente

contiene al punto (∞, ∞). En este caso son ramas infinitas de la curva, al no tener puntos determinados, la única determinación que tenemos es la dirección de la recta, llamándoles *ramas* asintóticas

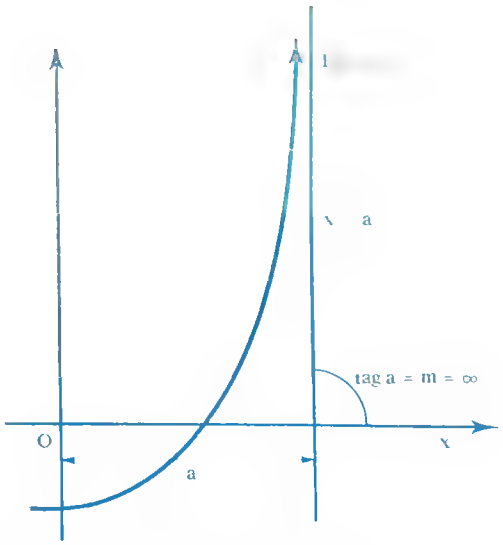
Las asíntotas de una curva, las determinan las rectas tangentes a la curva en los puntos del infinito.

Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblícuas. En la función $y = f(x)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

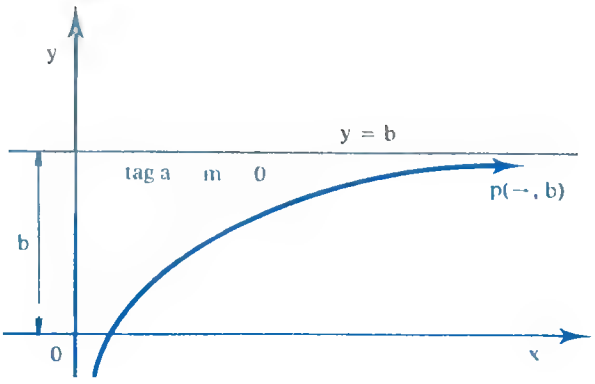
si la curva de representación de la función, se aproxima a la recta $x = a$. Esta recta tangente a la curva en el infinito es su asíntota.

Las asíntotas verticales de una curva la determinan los valores finitos de x, haciendo a su función $f(x) = \infty$.



Asíntotas horizontales o paralelas al eje ox.

Sea la función $y = f(x)$, el $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ y la curva de la función se aproxima a la recta $y = b$. Esta recta es tangente a la curva en el infinito o sea *su asíntota*. Las asíntotas horizontales de una curva la determinan los valores finitos de y. Cuando x tien de a ∞



Asíntotas oblícuas

Sea la función $y = f(x)$; en el caso de que existan, asíntotas oblícuas serían $y = ax + b$ así el $\lim_{x \to \infty} (ax + b) = \lim_{x \to \infty} f(x)$ que es el punto de cruce de la recta y la curva, que es el punto (∞, ∞). Así:

$$\lim_{x \to \infty} ax = \lim_{x \to \infty} [f(x) - b]$$

al ser a una constante

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - b}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ al ser } \lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} = 0. \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax].$$

Tenemos una ordenada en el origen b, una pendiente a, y las asíntotas oblícuas $y = ax + b$. Resumiendo:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ la curva tiene rama parabólica.

6.7.—Representación gráfica de una función

Para estudiar la representación gráfica de una función $y = f(x)$, vamos a ver los pasos a seguir:

1º Intervalos o puntos en los que la función está definida.

2º Corte de ejes:

a) Corte con eje 0X Se hace $y = 0$ y calculamos los valores de x.

b) Corte con eje 0Y Se hace $x = 0$ y calculamos los valores de y.

3º Cálculo de la primera derivada.

$$y' = f'(x).$$

a) Calculamos los valores de x para $f'(x) = 0$.

b) Calculamos los valores de x para $f'(x) > 0$ (crecimiento)

c) Calculamos los valores de x para $f'(x) < 0$ (decrecimiento).

4º Cálculo de la segunda derivada $y'' = f''(x)$

a) Calculamos los valores de x para $f''(x) > 0$ (curva cóncava hacia las y positivas)

b) Calculamos los valores de x para $f''(x) < 0$ (curva cóncava hacia las y negativas o convexa).

c) Calculamos los valores de $f''(x)$ de la primera derivada, teniendo en cuenta que si $f''(x) > 0$ es un mínimo y si $f''(x) < 0$ es máximo y si $f''(x) = 0$ posible inflexión

viene de la página anterior

$8 \times 1.000 + 7 \times 100 + 6 \times 10 + 5 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + + 2 \times \frac{1}{1.000} + 1 \times \frac{1}{10.000}$.

En tiempos más recientes fue inventado un sistema para abreviar estas anotaciones, la llamada «potencia» o «exponente», mediante el cual el número 8765,4321 puede escribirse así $8 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4}$

En el caso de 10^3, el número 3 es la «potencia» y 10^3 es otra forma de escribir $10 \times 10 \times 10$, o sea 1.000. Del mismo modo, los exponentes negativos son usados para expresar las fracciones decimales. Así 10^{-3} significa $\frac{1}{10^3}$ ó

$$\frac{1}{1.000} \text{ ó } 0{,}001.$$

En el ámbito de este sistema surge a veces el problema del valor de 10^0, o sea 10 elevado a la potencia cero. En nuestro número 8765,4321 se ve que 10^0 está entre 10^1 y 10^{-1}, es decir entre 10 y 1/10 y al que se le asigna arbitrariamente el valor 1. Esta clara simetría de potencias se extiende, además del 10, a los otros números y, excepto el mismo cero, todo número con exponente cero es considerado igual a 1.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

En el sistema numérico empleado actualmente —el sistema numérico decimal de anotación de posición, por llamarlo con su verdadero nombre— nosotros empleamos la base 10. Pero no existe una razón absoluta para esta preferencia —sino tal vez el número de dedos de un par de manos humanas— por lo que podríamos escribir los números en base 12 o en base 20. De hecho, durante más de la mitad del curso de nuestra civilización, los científicos de Occidente escribieron sus fracciones con un sistema de anotación de posición sobre una base diversas: era el así llamado sistema «sexagesimal»un sistema de quitar el aliento, elaborado en la antigua Mesopotamia con base el número 60.

Aun cuando 60 sea un número demasiado grande para constituir la base de un sistema numérico, lo empleamos cotidianamente cuando dividimos una hora en 60 minutos y un minuto en 60 segundos y cuando dividimos una circunferencia en 6 partes de 60°.

continúa en la página siguiente

5º Calculamos los máximos y mínimos.

6º Calculamos los valores de x para $f''(x) = 0$

7º Cálculo de la tercera derivada $y''' = f'''(x)$.

a) Calculamos para los valores de x que anulan la anterior derivada tal que $f'''(x) \neq 0$ (punto de inflexión).

b) Calculamos de los valores de x que anulan la anterior de rivada tal que $f'''(x)=0$ (puede tener o no tener punto de inflexión según el comportamiento de $f''(x) = 0$.)

8º Simetrías de la función f(x).

a) Respecto al eje OX
b) Respecto al eje OY
c) Respecto al origen

9º Periodicidad de la función f(x).

10º Asíntotas

a) Verticales $x = a \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \infty$

b) Horizontales $y = b \quad y = \lim_{x \to \infty} f(x) = b$ o cuando $x \to -\infty$

c) Oblícuas $y = px + q$

$$q = \lim_{x \to \infty} (y - px)$$

11º Cálculo del signo de la función f(x) en los intervalos del eje de abcisas, delimitados por el eje 0X y las asíntotas verticales.

Ejemplo

Representar gráficamente la función:

$$y = x^3 - x^2 - 6x$$

Solución:

1º La función está definida para todos los valores de x

2º Corte a los ejes:

Corte a 0Y : $x = 0 \qquad y = 0$

Corte a 0X : $y = 0 \qquad x^3 - x^2 - 6x = 0$

$$x(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x = 0 \qquad x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} \frac{1 + 5}{2} = 3 \\ \\ \frac{1 - 5}{2} = -2 \end{cases}$$

$x = 0 \qquad y = 0$
$x = 3 \qquad y = 0$
$x = -2 \qquad y = 0$

3º $y' = 3x^2 - 2x - 6$

Igualando a 0 $\quad 3x^2 - 2x - 6 = 0$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \begin{cases} \dfrac{+2 + 2\sqrt{19}}{6} = \dfrac{1 + \sqrt{19}}{3} \\ \dfrac{2 - 2\sqrt{19}}{6} \qquad \dfrac{1 - \sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

$$y' = 0 \qquad x = \frac{1 + \sqrt{19}}{3},\ x = \frac{1 - \sqrt{19}}{3}$$

$$y = (x - \frac{1 + \sqrt{19}}{3})\,(x - \frac{1 - \sqrt{19}}{3})$$

$$x < \frac{1 - \sqrt{19}}{3} \qquad \text{creciente.}$$

$$\frac{1 - \sqrt{19}}{3} < x < \frac{1 + \sqrt{19}}{3} \qquad \text{decreciente.}$$

4º Calculamos $y'' = 6x - 2$

para $x = \dfrac{1 - \sqrt{19}}{3} \qquad y'' = 6 \cdot (\dfrac{1 - \sqrt{19}}{3}) - 2 =$

$$= 2 - 2\sqrt{19} - 2 = -2\sqrt{19}$$

$$y'' < 0 \qquad \text{máximo.}$$

para $x = \dfrac{1 + \sqrt{19}}{3} \qquad y'' = 6(\dfrac{1 + \sqrt{19}}{3}) - 2 =$

$$= 2 + 2\sqrt{19} - 2 = +2\sqrt{19}$$

$y'' > 0$ $\quad$ mínimo.

$y'' = 0 \qquad 6x - 2 = 0 \qquad x = \dfrac{1}{3}$

$$+\infty > x > \frac{1}{3} \qquad y'' > 0 \qquad \text{cóncava hacia arriba.}$$

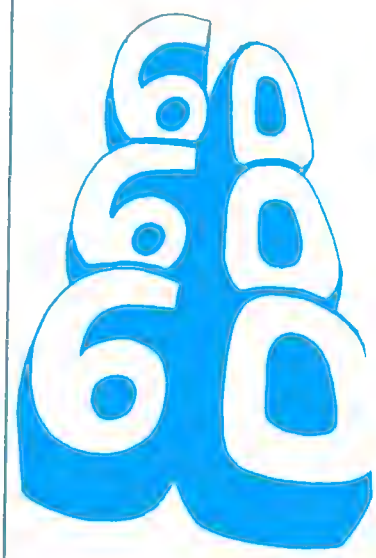
$$-\infty < x < \frac{1}{3} \qquad y'' < 0 \qquad \text{cóncava hacia abajo}$$

5º Valores de x para $y' = 0$

$$x = \frac{1 - \sqrt{19}}{3} \simeq -1{,}12$$

$$y = (\frac{1 - \sqrt{19}}{3})^3 - (\frac{1 - \sqrt{19}}{3})^2 - 6(\frac{1 - \sqrt{19}}{3})$$

$$y = \frac{-56 + 38\sqrt{19}}{27} \simeq 4$$



viene de la página anterior

Si un comandante dice a sus hombres que sincronicen sus relojes sobre 5 07 09, ellos comprenden que quiere decir 7 minutos y 9 segundos después de las 5 de la madrugada; en vez, pocos serían capaces de descifrar el número 5, 7, 9, en base 60 (que para los habitantes de Mesopotamia significaría $5 \times 60^2 + 7 \times 60^1 + 9 \times 60^0$) y esos pocos llegarían de todas formas al número 18.429 que representa el resultado exacto: las 5 07 09 llegan de hecho 18.429 segundos después de la medianoche.

El sistema sexagesimal tenía un gran inconveniente debido a su base demasiado grande: para indicar todo número desde el 0 hata el 59, los habitantes de Mesopotamia debían emplear 59 símbolos diversos. Nadie, ni siquiera los sumerios o los babilonios, que habitaron a continuación en Mesopotamia, quiso nunca aprender de memoria 59 cifras. Para superar esta dificultad, en la antigüedad usaron combinaciones de dos símbolos en forma triangular, uno para el número 1 y otro para el número 10.

BERNOULLI (Jean II)

NACIO en Basilea en 1710, falleciendo en la misma en 1790. Hermano de Daniel, fue profesor de matemáticas, pero éstas las aplicó a su gran afición que fue la física. Uno de sus primeros estudios fue de los imanes. Realizó también estudios sobre el calor y sobre la propagación de la luz.

BERNOULLI Jean III)

HIJO del anterior, nació en Basilea en 1743 falleciendo en Berlín en 1807. Conocido como el niño prodigio de la familia, ya que a los 13 años era doctor en filosofía y a los 19 años astrónomo en la escuela de Berlín. Infatigable viajero, conoció casi toda Europa, recopilando datos científicos por donde pasaba, hasta que de vuelta a Berlín publicó todos estos estudios, los que le valió ser nombrado profesor de matemáticas en esta universidad hasta su fallecimiento.

P(—1,12, 4) máximo

$$x = \frac{1 + \sqrt{19}}{3} = 1{,}78$$

$$y = \left(\frac{1 + \sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1 + \sqrt{19}}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1 + \sqrt{19}}{3}\right) =$$

$$y = \frac{-56 - 38\sqrt{19}}{27} \simeq -8$$

P'(1,78, —8) mínimo.

6.º $y'' = 0$

$$6x - 2 = 0$$
$$x = 1/3.$$

7.º $y''' = 6 \neq 0$ punto de inflexión.

$x = 1/3$ es un punto de inflexión

$$y = x^3 - x^2 - 6x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right) =$$

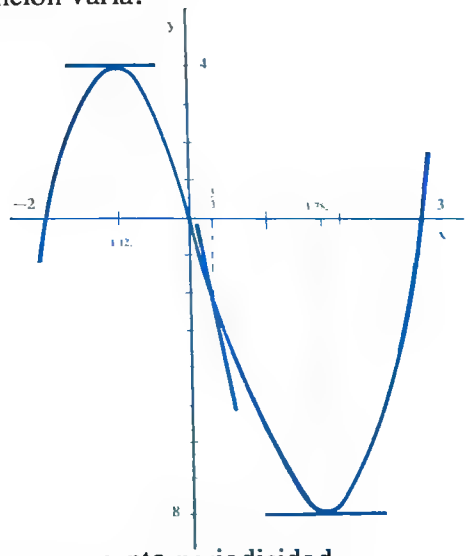
$$= \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 2 =$$

$$y = \frac{-56}{27}$$

$$p\left(\frac{1}{3}, -\frac{56}{27}\right) \rightarrow \text{punto de inflexión.}$$

8.º La función no es simétrica respecto del eje 0Y puesto que al sustituir x por (—x) la función varía.

No es simétrica respecto al origen porque al sustituir x por —x e y por —y la función varía.



9.º La función no presenta periodicidad.

10.º Asíntotas. La función no presenta asíntotas verticales, horizontales, ni oblícuas.

7.— ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CURVA

Teniendo la función $y = f(x)$ o ecuación de una curva del plano y la ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$, esta recta puede ser tangente a cualquier curva. Vamos a estudiar el comportamiento de la unión de dicha recta con un punto de esta curva (ya sea circunferencia, elipse, hipérbola o parábola).

7.1.—Ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto perteneciente a ella.

Vimos que la ecuación de la recta era $Ax + By + C = 0$, la ecuación reducida de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + mx + my + p = 0$, existe un punto P que satisface a las dos ecuaciones y así de esta manera, nos aparecía una ecuación de segundo grado que sería $ax^2 + bx + c = 0$ y así podremos tener varias soluciones.

1.ª Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones, la recta tiene dos puntos de contacto y por lo tanto es *secante* a la circunferencia.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución, la recta tiene *un punto de contacto* y por lo tanto es *tangente* a la circunferencia.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real, la recta *no tiene puntos de contacto* con la circunferencia, dicha *recta* es *exterior a la circunferencia.*

Teniendo la ecuación en la forma reducida $x^2 + y^2 = r^2$ y la ecuación de la tangente en $P_0(x_0, y_0)$, entonces $x_0x + y_0y = r^2$. Si P es un punto perteneciente a la circunferencia, se tiene que verificar la ecuación

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

Si derivamos tendremos:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

el valor en P_0 será $y' = -\frac{x_0}{y_0}$.

La ecuación de la tangente en P_0 será:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

$$y_0y - y_0^2 = -x_0x + x_0^2$$

Despejando:

$$x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

o sea:

$$x_0x + y_0y = r^2$$

¡Mirad, hijos mios! Dijo un padre a sus cinco hijos. Voy a dejaros la herencia cada uno de vosotros.

—Ya sé que ninguno de vosotros sois iguales. La naturaleza me ha dada un hijo inteligente, otro trabajador, otro un vago, una hija guapa y otro borracho. A pesar de vuestras virtudes y defectos os voy a dar a cada uno lo que os corresponde. En cada uno de estos cinco cofres existe una herencia para cada uno de vosotros. Un cofre (el que yo he elegido) contiene una gran fortuna para el primero que adivine cuál es el elegido por mí y será para el primero que demuestre cuál es, el cofre indicado. El que lo acierte y demuestre después se llevará otro cofre que contiene la mitad de la fortuna del cofre anterior y que este número de cofre sabe mi notario. El tercero que lo demuestre recibirá otro cofre que contendrá la mitad de la fortuna del cofre anterior. Y así sucesivamente hasta llegar al quinto cofre.

Sabeis que yo nací a las 22 horas y 37 minutos del día 28 de noviembre de 1922, o sea, y poniendo todas las cifras juntas 223728111922 veis que da más de doscientos millones.

—Bien, observareis que la fortuna del último será dieciseis veces menor que la fortuna del primero.

—Vais a contar los cofres de la siguientes manera:

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 11 12 13

y después

9 8 7 6 5

continúa en la página siguiente

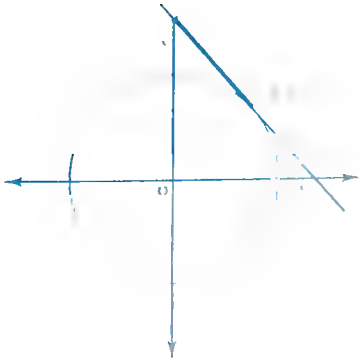
y así sucesivamente hasta llegar al 223728111922.

—Pero papá, estaré contando mi vida y jamás terminaré, dijo el vago, casi prefiero que cuenten los demás y que me dejen a mí el último.

—Papá, yo me quiero casar pronto y necesito la herencia lo antes posible, dijo la hija.

—En fin, vosotros vereis lo que haceis. La cuenta termina en un cofre, el que antes me diga y demuestre en qué cofre terminará la cuenta, su contenido (escrito, por supuesto, y con la llave que la tiene un notario) le será entregado inmediatamente y lo mismo al que termine el segundo y así sucesivamente. Manos a la obra.

La solución en la página 1279



Ejemplo

Teniendo la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, la tangente en $(3, \sqrt{2})$.

Solución:

En el punto $(3, \sqrt{2})$ la pendiente será

$$y' = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

La ecuación de la tangente será:

$$y - \sqrt{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(x - 3)$$

$$2y - 2\sqrt{2} = -3\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}$$

$$2y + 3\sqrt{2}x = 11\sqrt{2}$$

7.2.—Ecuación de la tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella.

Sea la ecuación de la circunferencia:

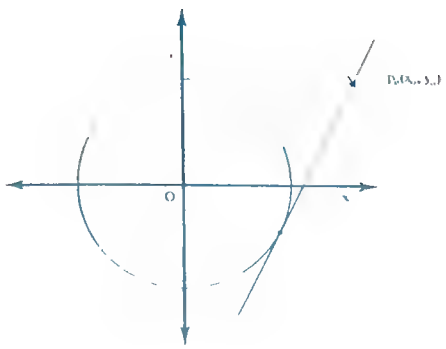
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

y un punto $P_0(x_0, y_0)$ exterior a ella. desde este punto podemos trazar a la circunferencia infinitas rectas cuya ecuación sería:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

unas serán exteriores, otras secantes y otras tangentes. Solamente nos interesan estas últimas que verifican la ecuación:

$$x^2 + y^2 + \acute{m}x + ny + p = 0$$



Entonces $\begin{cases} x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \\ y = y_0 + \lambda(x - x_0). \end{cases}$

Sustituyendo el valor de y, arriba

$$x^2 + [y_0 + \lambda(x - x_0)]^2 + mx + n[y_0 + \lambda(x - x_0)] + p = 0$$

entonces

Resolviendo la ecuación, nos encontraremos con discriminante negativo, sin solución real, la recta no corta a la circunferencia, discriminante positivo la recta corta a la circunferencia en dos puntos, recta secante, discriminante igual a 0, la recta corta a la circunferencia en un solo punto, recta tangente.

Ejemplo

Dada la circunferencia: $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 8 = 0$ y el punto exterior $P = (3, 0)$, las tangentes a la circunferencia desde dicho punto.

Solución

Desde P el haz de rectas será:

$$y - 0 = \lambda(x - 3) \qquad y = 0 + \lambda(x - 3)$$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + [\lambda(x - 3)]^2 + 5x + 3[\lambda(x - 3)] - 8 = 0$$

$$x^2 + \lambda^2x^2 - 6\lambda^2 + 9\lambda^2 + 5x + 3x\lambda - 9\lambda - 8 = 0$$

$$x^2(1 + \lambda^2) + x(-6\lambda^2 + 5 + 3\lambda) + (9\lambda^2 - 9\lambda - 8) = 0$$

el discriminante será

$$(3\lambda + 5 - 6\lambda^2)^2 - 4(1 + \lambda^2)(9\lambda^2 - 9\lambda - 8) = 0$$

$$-51\lambda^2 + 30\lambda - 36\lambda^3 + 25 - 26\lambda^4 - 36\pi^4 - 4\lambda^2 + 36\lambda + 32 +$$

$$+ 36\lambda^3 = 0$$

$$-55\lambda^2 + 66\lambda + 57 = 0$$

Resolvemos la ecuación

$$\lambda = \frac{-66 \pm \sqrt{4.356 + 12.540}}{-110} = \begin{cases} \dfrac{-66 + 130}{-110} = 0{,}58 \\ \dfrac{-66 - 130}{-110} = 1{,}78 \end{cases}$$

luego existen dos tangentes a la circunferencia desde el punto (3, 0) que serían

$$y = 0{,}58(x - 3) \qquad y = 1{,}78(x - 3)$$

En el mundo de los coleccionistas de sellos, existen múltiples anécdotas, otras veces historias y otras veces las que no sabemos si son historias o meras anécdotas. He aquí una de ellas:

Se cuenta, que de los primeros sellos que se imprimieron en Gran Bretaña, (primera o segunda edición) sólo quedaban dos, uno estaba en Nueva York en poder de un rico coleccionista y el otro en Londres en poder de una testamentaria. Estos sellos estaban valorados en diez mil libras esterlinas cada uno.

Este último sello cayó en manos de un libertino, nieto del propietario (fallecido) del mismo. Así como también, alhajas, pinturas, un castillo y terrenos.

Dicho heredero mandó vender el castillo y los terrenos y subastar las alhajas, pinturas y la colección de sellos de su abuelo, donde se encontraba precisamente este raro ejemplar de la filatelía.

Una famosa casa de subastas se quedó con dicho encargo.

Llegó el día de la subasta y, claro la sala estaba repleta de grandes filatélicos reunidos de todo el mundo.

No se hizo caso (relativo) a la subasta de las alhajas. Hubo alguna joya que por su historia y antigüedad se pujó (subastó) bastante fuerte.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Llegó el turno a las pinturas y a excepción de un Rembrand la subasta de éstas pasó sin pena ni gloria.

¡Hasta que llegó el esperado momento! La subasta de los sellos.

Se comenzó la subasta por grupos, es decir, sellos de la India de tal o cual año, sellos de China, etc... hasta llegar el momento esperado.

Se comenzó la subasta con SEIS MIL LIBRAS.

¡¡SIETE MIL!! un francés.

¡¡OCHO MIL!! un belga.

¡¡DIEZ MIL!! un alemán.

¡¡¡QUINCE MIL!!! un americano.

Y se lo adjudicó.

Se levantó. Fué a la mesa y pagó las quincemil libras. Tomó el sello, sacó una cerilla y... quemó el sello.

El estupor en el público era inaudito. Cómo se le había ocurrido quemar no ya las quince mil libras, sino un ejemplar lleno de historia.

Señores. —dijo el pirómano— acabo de quemar uno de los dos unicos sellos de la colección valorados cada uno en diez mil libras oficialmente y aunque éste me costó quince mil. Ahora, solo existe UN SOLO SELLO de esta colección y se encuentra en Nueva York celosamente guardado en la caja fuerte de un banco. ¡¡Yo soy su propietario!! y ahora ese único sello lo valoro en CIEN MIL LIBRAS.

7.3.—Tangente a la elipse en un punto de ella.

Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto de ella $p(x_1, y_1)$.

la ecuación de la tangente. $y - y_1 = y'_p (x - x_1)$

y la de la normal $y - y_1 = \frac{1}{y'_p}(x - x_1)$

Derivando $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tendremos $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$

Por tanto $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

y en $P(x_1, y_1)$ será: $y' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

sustituyendo, tenemos: $y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$

luego $a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2$

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$$

dividiendo por $a^2 b^2$

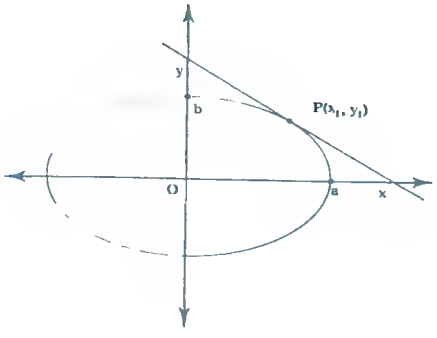
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Ecuación tangente a la elipse.

La ecuación de la normal a la elipse será de la forma:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$



7.4.—Tangente a la elipse desde un punto exterior a ella.

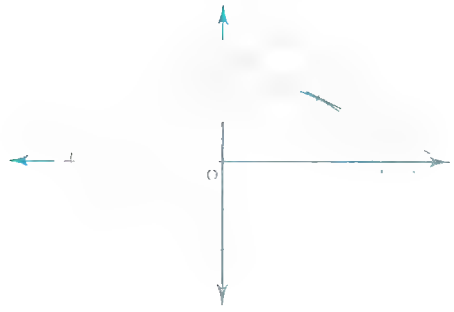
Sea la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y un punto exterior a la misma $P(x_1, y_1)$ para que exista tangencialidad, *el discriminante* tiene que ser cero y nos resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



7.5.—Ecuación de la tangente y la normal a una hiperbola en un punto

Dada la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y consideramos un punto $P(x_1, y_1)$ de ella. La ecuación de la tangente a la hipérbola en ese punto vendrá dada por:

$$y - y_1 = y_p' (x - x_1)$$

y la ecuación de la normal.

$$y - y_1 = -\frac{1}{y_p'} (x - x_1)$$

Para hallarlas partimos de la ecuación general:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivando $\quad \dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2yy'}{b^2} = 0$

Despejamos $y' = \dfrac{b^2 x}{y a^2}$

y en el punto $P(x_1, y_1)$ $\quad y_p' = \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

Es el mayor país de América Latina y el país de los grandes contrastes geográficos.

Pueden establecerse cuatro grandes zonas en Brasil, cada una de las cuales tiene un forma diferente de vida:

Al Norte, la vertiente atlántica es una zona costera llana y uniforme rota sólo por la desembocadura de grandes ríos o bahías. Es una región fértil cuyos productos son la caña de azúcar, tabaco, café, etc.

Si dejamos la costa, se penetra en el interior más pobre del mundo, el setão, donde la sequía es la mayor calamidad, falta el agua durante años y el hambre se hace perenne. Esta región está habitada por el "cochoclo", campesino ligado a la tierra y al duro trabajo de los grandes latifundios.

Al abrigo de la costa atlántica se levanta el macizo del Brasil, una extensa pradera sin fin. Es el imperio del ganado, que pacen bajo el cuidado de los gauchos, siempre a caballo con su poncho y su estraordinaria habilidad con el lazo para capturar las reses.

Al Sur están los terrenos fértiles gracias a las intensas lluvias. Es el reino del café, la gran riqueza de Brasil.

luego la tangente será:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2$$

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - a^2 y_1 y_1$$

Si dividimos por $a^2 b^2$

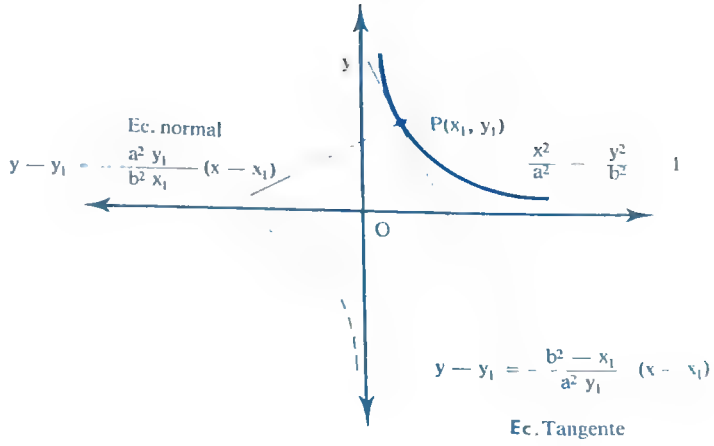
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2}$$

pero $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ luego

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

La ecuación de la normal será:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$



7.6.—Tangente a la hiperbola desde un punto exterior.

Si tenemos la hipérbola de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y un punto $P'(x_1, y_1)$ exterior a ella, al pasar la tangente por $P'(x_1, y_1)$ tiene que tener por ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Resolviendo el sistema formado por

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases}$$

BERNOULLI (NICOLA I)

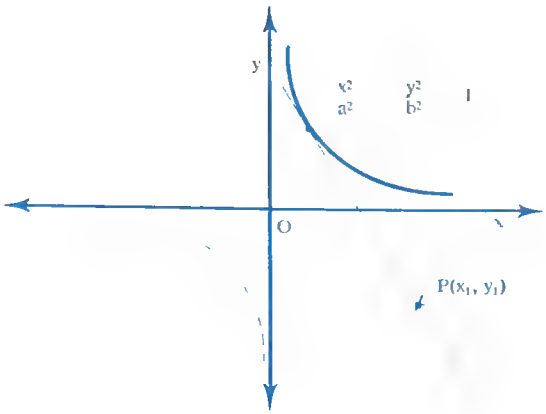
NACIO en Basilea, en 1688, y falleció en la misma ciudad en 1759. Sobrino de Jacques y de Jean. Estudió matemáticas y derecho. Fue profesor de matemáticas en Padua (Italia). Allí sus estudios no eran considerados importantes al lado de los grandes «sabios» italianos. Sus estudios eran origen de controversia en las distintas universidades italianas, lo que al fin le llevó a volver a Basilea donde fue nombrado profesor de Derecho.

Con la «Teoría de las condiones de integridad de las funciones diferenciales», empezadas a definir por sus tíos, le llevó varios años de dedicación.

BERNOULLI (Nicolás II)

NACIO en Groninga en 1695 y falleció en San Petesburgo en 1726. Hijo de Jean I. Fue profesor de matemáticas de la universidad de San Petesburgo. Su gran afición fue la física y la astronomía.

Tenemos que la solución sería una ecuación de 2º grado que para que tuviera una solución única tendría que cumplir que el discriminante fuera igual a 0 y de esta igualdad podremos hallar m y por consiguiente la ecuación de la tangente.



7.7.—Ecuación de la tangente y de la normal a la parabola en un punto

Si tenemos la parábola de ecuación

$$y^2 = 2px$$

y un punto de ella $P(x_1, y_1)$

La ecuación de la tangente será:

$$y - y_1 = y_p' (x - x_1)$$

La ecuación de la normal

$$y - y_1 = -\frac{1}{y_p'}(x - x_1)$$

Si aplicamos derivadas a la ecuación general de la parábola

$$2yy' = 2p$$

$$y' = \frac{p}{y}$$

Para el punto $l'(x_1, y_1)$ $\qquad y_p' = \frac{p}{y_1}$

Con lo que la ecuación de la tangente quedaría

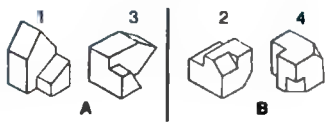
$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$

$$yy_1 = y_1^2 + px - px_1 = 2px_1 + px - px_1$$

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

(B) — 1/3



He aquí la solución de los problemas propuestos en la página

En la sección de matemáticas, estando exentos los físicos, fueron los biólogos los mejores. Los psicólogos eran segundos a poca distancia, mientras los antropólogos venían a continuación. Los físicos fueron los mejores en la percepción de relaciones espaciales, seguidos de psicólogos, biólogos y antropólogos. Los físicos teóricos y los antropólogos resultaron primeros en la habilidad verbal.

Solución al Tesoro

Os habreis dado cuenta (creo yo) que el modelo de recuento aritmético pertenece al módulo 8. Dividiendo el núm. 223728111922 entre 8 nos dará un cociente x (no nos importa cuál será) y nos dará un resto 2 que éste si que nos importa ya que se trata del cofre número "2". Más fácil todavía, no tenemos más que dividir 922 entre 8, ya que como 1000 = 0 en el módulo 8, tampoco nos importan las cifras anteriores.

¿Quién se llevó la mejor tajada? No nos importa tampoco. Lo que sí que nos importa es lo que te hubieras elevado tú.

Solución al problema del robo de los diamantes.

Había robado todas las cajas menos una para viera el jefe de la sureté de París cómo lo había realizado.

La caja que quedaba la puso boca abajo y abriendo una pequeña ranura al tirar de la tapa corredera suficiente para que cayeran los diamantes y la víbora siguiera dentro.

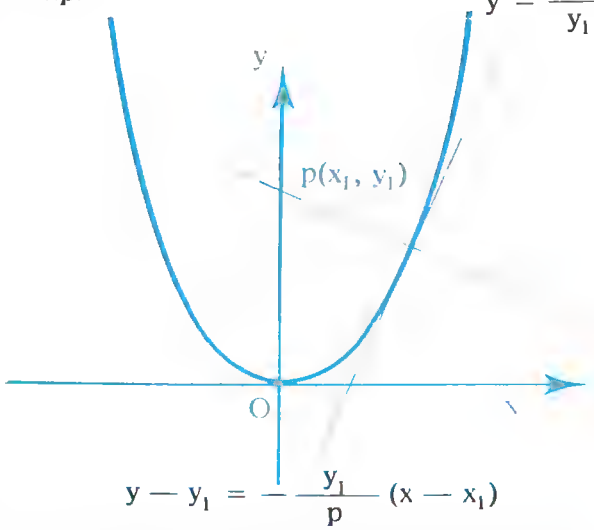
—He dado la solución porque estaba en la cárcel. Si hubiera estado libre me hubiera limitado a robarlas. Que mala suerte.

La ecuación de la normal sería:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

$y^2 = 2px$

$y = \frac{p}{y_1}(x + x_1)$



$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

7.8.—Tangente a la parabola desde un punto exterior.

Si tenemos la parábola $y^2 = 2px$ y el punto exterior $P(x_1, y_1)$.

La ecuación de la tangente a la parabola desde $P(x_1, y_1)$ tendrá la forma

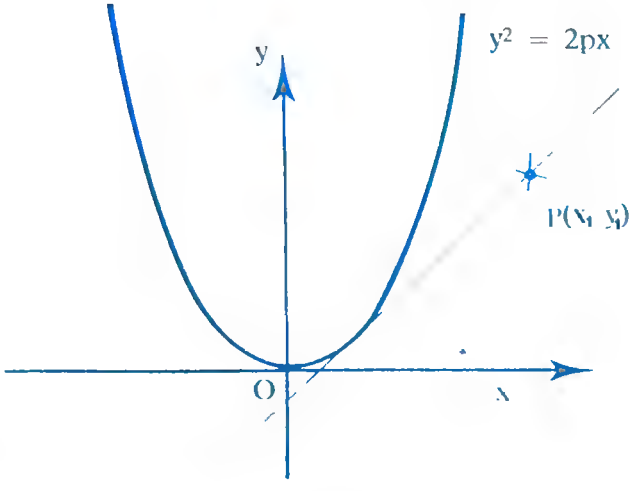
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Resolviendo el sistema formado por

$$y^2 = 2px$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Nos dará una ecuación de 2.º grado, cuyo discriminante tiene que ser 0 para que exista una solución única, con lo que podremos hallar m y por lo tanto la ecuación de la tangente.



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

TEMA 32

NUMEROS COMPLEJOS

INDICE

13.—CONCEPTOS PREVIOS
- 13.1.—Operaciones con complejos.
- 13.2.—Unidad imaginaria.
- 13.3.—Forma binómica del número complejo.
- 13.4.—Operaciones con complejos en forma binómica.

14.—ESTRUCTURA EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

15.—ELEMENTOS CONJUGADOS. PROPIEDADES.

16.—REPRESENTACION VECTORIAL.

17.—MODULO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

18.—FORMULA MODULO-ARGUMENTAL O TRIGONOMETRICA.

19.—OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA TRIGONOMETRICA.
- 19.1.—Suma de números complejos en forma trigonométrica.
- 19.2.—Producto de números complejos en forma trigonométrica.
- 19.3.—Cociente de números complejos en forma trigonométrica.
- 19.4.—Potencia de números complejos en forma trigonométrica.

20.—OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA MODULO ARGUMENTAL.
- 20.1.—Producto de números complejos.
- 20.2.—Cociente de números complejos.
- 20.3.—Potencia de números complejos.

TEMA 32

CONTINUACION

21.—RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.
- 21.1.—Raíz cuadrada de un complejo en forma binómica.
- 21.2.—Raíces enésimas de un complejo en forma trigonométrica.
- 21.3.—Raíces de números reales.

22.—RAICES N-ESIMAS DE LA UNIDAD.

23.—PROPIEDADES DE LAS RAICES N-ESIMAS DE LA UNIDAD.

24.—RAICES PRIMITIVAS DE LA UNIDAD. PROPIEDADES.

25.—FORMA EXPONENCIAL DEL NUMERO COMPLEJO-LOGARITMOS.

26.—LOGARITMOS NEPERIANOS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

27.—POTENCIAS DE BASE Y EXPONENTE COMPLEJO.

28.—TRANSFORMACIONES.
- 1) Transformación $w = z + C$
- 2) Transformación $w = Bz$
- 3) Transformación $w = Bz + c$

28.3.—Función potencial.

28.4.—Función inversa.

29.—EJERCICIOS Y SOLUCIONES.

TEMA 32

NUMEROS COMPLEJOS

13.— CONCEPTOS PREVIOS

Como vimos en el tomo anterior un número complejo se define por un par ordenado de números reales (x, y).

13.1.—Operaciones con complejos.

Suma

Dados dos números complejos (x_1, y_1) (x_2, y_2) la suma es otro número complejo tal que

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Tiene las propiedades: asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento opuesto.

Resta

La resta se realiza sumando al primer complejo el opuesto del segundo

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) =$$

$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Producto

El producto se define

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

tiene las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento inverso

División

Se define el cociente de dos complejos como

$$\frac{(x_1\ y_1)}{(x_2,\ y_2)} = (x_1, y_1)\,(x_2, y_2)^{-1}$$

siendo $(x_2, y_2)^{-1}$ el inverso de (x_2, y_2)

ERATOSTENES

NACIO en Cirene el año 284 a. de C. y falleció en Alejandría el año 191 a. de C. Vivió en Atenas donde estudió geografía, matemáticas, astronomía y filosofía. Gran difusión tuvieron sus enseñanzas, hasta tal punto que, Ptolomeo III, rey de Alejandría, lo llamó para confiarle la educación de sus hijos, pasando posteriormente también a la dirección de la Biblioteca. En los diversos campos de la ciencia sus aportaciones fueron numerosas e importantes. Como matemático es de destacar su célebre CRIBA que lleva su nombre para encontrar los números primos, y por el MESOLABIO, instrumento de cálculo que tiene por objeto resolver la media proporcional.

continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Eratóstenes midió de un modo casi exacto la longitud de la circunferencia de la Tierra. Determinó la amplitud del arco de meridiano entre Siena y Alejandría: observando que durante el solsticio de verano entre Siena y Alejandría (21 de junio), el Sol en Siena estaba justo en la vertical del lugar, supuesto que los rayos del sol penetraban en los pozos más profundos hasta verse reflejado en el agua. El mismo día midió Eratóstenes la inclinación que tenían los rayos solares en Alejandría y por la sombra que proyectaba una columna (7º y 12'). En el mismo meridiano están situadas ambas ciudades y a una distancia de 800 Km. Dedujo que 800 kilómetros correspondía a 7º 12' (ó 7º con dos décimas de grado).

$$\frac{360^\circ \times 800 \text{ km}}{7{,}2} = 40.000 \text{ km}$$

No conforme con este cálculo, lo repitió entre Siene y Méroe (que creyó estaba en el unísono meridiano) y obtuvo el mismo resultado.

13.2.—Unidad imaginaria.

Se conoce como unidad imaginaria «i» a un número que multiplicado por si mismo nos da —1

$$i = \sqrt{-1}$$

Podemos calcular las distintas potencias de i por la fórmula

$$i^{4K+n} = i^n$$

Como el número $n < 4$ y siendo $i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = +1$

13.3.—Forma binómica del número complejo.

La forma binómica se representa por $x + yi$ siendo x la parte real e y la parte imaginaria del número complejo.

13.4.—Operaciones con complejos en forma binómica.

Suma de complejos

Si tenemos dos números en forma binómica $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, definimos su suma

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Resta de números complejos

Si tenemos dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ para efectuar su resta, se suma a uno de ellos, el opuesto del otro

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) + (-x_2 - y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Producto de números complejos

Si tenemos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, su producto $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$

División de números complejos

Sabiendo que el conjugado de un número complejo $z_1 = x_1 + y_1 i$ es aquel complejo que tiene la misma parte real x_1 y la parte imaginaria opuesta a la de z_1, es decir:

$$\overline{z} = x_1 - y_1 i$$

Para efectuar la división de dos números complejos z_1 y z_2 se multiplica dividendo y divisor por el conjugado del divisor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$$

Potencias de un número complejo

Para hallar la potencia de un número complejo $z = x + yi$ se utiliza la fórmula del binomio de Newton.

$$z^m = (x + yi)^m =$$

$$\binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}(yi)^1 + \binom{m}{2} x^{m-2}(yi)^2 + \ldots + \binom{m}{m} (yi)^m$$

Ejemplo 1 -

Calcular $(2 + 3i)^4$.

Solución

Desarrollamos la potencia por el binomio de Newton.

$$(2 + 3i)^4 = \binom{4}{0} (2)^4 + \binom{4}{1} (2)^3 (3i) + \binom{4}{2} (2)^2 (3i)^2 +$$

$$+ \binom{4}{3} (2)^1 (3i)^3 + \binom{4}{4} (3i)^4$$

Aplicando las propiedades de los números combinatorios y de las potencias de i vistas anteriormente, tenemos:

$$1 \cdot 16 + 4 \cdot 8 \cdot 3i + 6 \cdot 4 \cdot 9i^2 + 4 \cdot 2 \cdot 27\, i^3 + 1 \cdot 81 \cdot i^4 =$$

$$= 16 + 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 120i$$

Ejemplo 2 —

Calcular $(i^5 + i^8)^3$

Solución

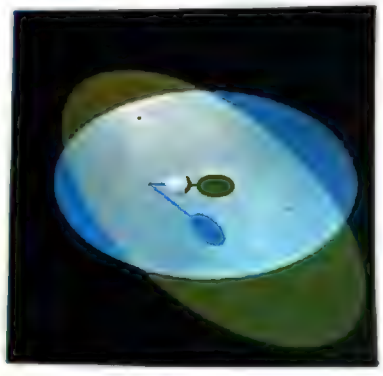
Aplicando las potencias de i tenemos $i^5 = i$ y $i^8 = 1$

$$(i^5 + i^8)^3 = (i + 1)^3$$

Resolviendo por el binomio de Newton

$$(1 + i)^3 = \binom{3}{0}(1)^3 + \binom{3}{1}(1)^2 (i)^1 + \binom{3}{2}(1)(i)^2 + \binom{3}{3}(1)^3$$

$$= 1 + 3i + 3(-1) + (-i) = -2 + 2i$$

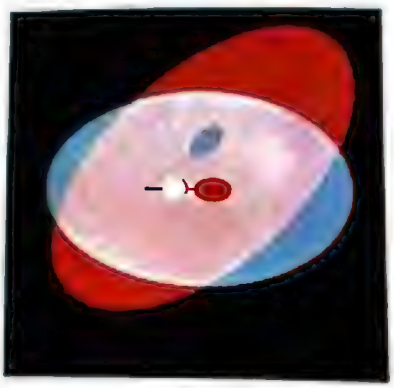


MEZCLAS DE COLORES MEDIANTE ADICION

Si examinamos la pantalla iluminada del cinescopio de un televisor a colores con una lupa, lo encontraríamos cubierto de minúsculos puntos fosforescentes sistematizados en grupos de tres, comprendiendo cada grupo un puntito rojo, uno verde y otro azul. Sin embargo, sin los aumentos no es posible distinguir los puntitos, dada su extrema pequeñez, y el ojo los mezcla en infinidad de colores y de matices.

Esta transformación de tres colores en un número mucho mayor se denomina síntesis aditiva. Este proceso se puede reproducir mediante los rayos luminosos de tres proyectores provistos de filtros rojo, verde y azul. La unión de dos rayos cualquiera producen un nuevo color: el azul y el verde dan el cyan; el rojo y el azul el magenta; el rojo y el verde, el amarillo. Donde se sobreponen los tres rayos, aparece el blanco. Aún cuando puedan parecer diferentes los rayos componentes, las mezclas diversas siempre son combinaciones de rojo, verde y azul.

continúa en la página siguiente



Es posible crear otros matices de color modificando la intensidad de los rayos. La luz roja y la verde pálido —sin sombra de azul— producen el marrón, ya que en principio todos los marrones no son sino amarillos de baja intensidad (rojo más verde). Para obtener el rosa se usan los tres rayos, siendo ligeramente más fuerte el rojo.

La síntesis aditiva puede basarse en tres colores cualesquiera, siempre que cada uno de ellos corresponda a un tercio diferente del espectro. La televisión usa los puntitos rojos, verdes y azules porque con ellos se produce la gama más amplia de colores. Para crear el blanco, en un cinescopio a colores, los rayos electrónicos estimulan los puntitos de cada grupo en la misma medida; el negro se produce no estimulándoles sin más. Así, los programas en blanco y negro contemplados en cinescopios a colores son en raalidad programas en negro-rojo-verde-y-azul.

14.— ESTRUCTURA EN EL CONJUNTO DE LOS COMPLEJOS

En el conjunto C definimos

a) La identidad: Dos complejos son iguales si y sólo si, tienen iguales ambos elementos y en el mismo orden.

$$\left.\begin{array}{l} z = (a, b) \\ z' = (a', b') \end{array}\right\} \quad z = z' \qquad \text{si} \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

b) Leyes de composición interna.

1 - *Suma* La suma anteriormente definida tiene la propiedad asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro, que es $z = (0, 0)$; elemento opuesto tal que

$$z + z' = (0, 0)$$

siendo $z = (a, b)$ y su opuesto es $z' = (-a, -b)$.

Por tanto tiene estructura de grupo abeliano.

2 Producto de números complejos

El producto ya definido tiene las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva respecto a la suma; elemento neutro, e siendo:

$$e \cdot z = z; \text{ siendo } e = (1, 0)$$

c) Elemento simétrico z' tal que:

$$z \cdot z' = e$$

Luego el conjunto de los números complejos tiene estructura de cuerpo para las leyes suma y producto.

d) Con la ley de composición externa de multiplicar por un real $a \cdot z = z'$ adquiere estructura de espacio vectorial de dimensión 2.

Tomamos una base del espacio vectorial $e = (1, 0)$ y $i = (0, 1)$ y cada elemento se puede poner como una combinación lineal de los elementos de la base.

$$z = ae + bi$$

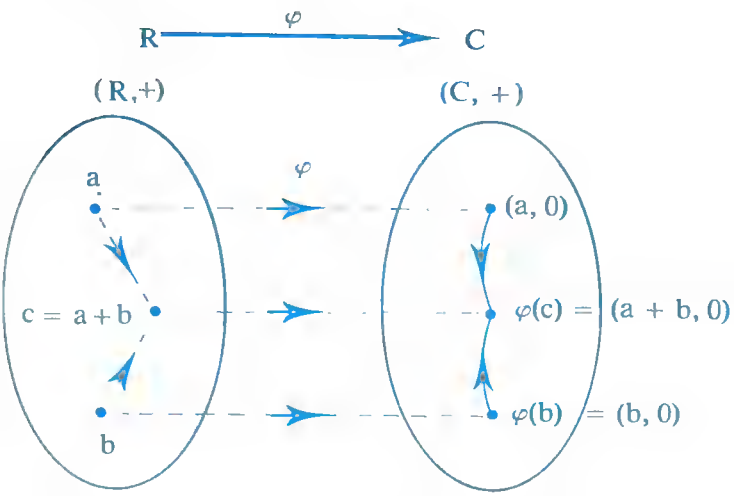
entonces para cumplir el producto se define.

$$z \times z' = (a.e + bi) \times (c.e + di) = ace^2 + adci + bcei +$$

$$+ bdi^2 = ace^2 + bdi^2 + (ad + bc)ei = (ac - bd)e + (ad + bc)i$$

luego $e^2 = e$ $\qquad i^2 = -e$ $\qquad ei = ie = i$

Consideremos la aplicación



se cumple que: $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

ya que $(a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$

$$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) =$$
$$= (a, 0) \times (b, 0) = (a.b, 0)$$

luego es un isomorfismo entre R y $\varphi(R)$ y por tanto

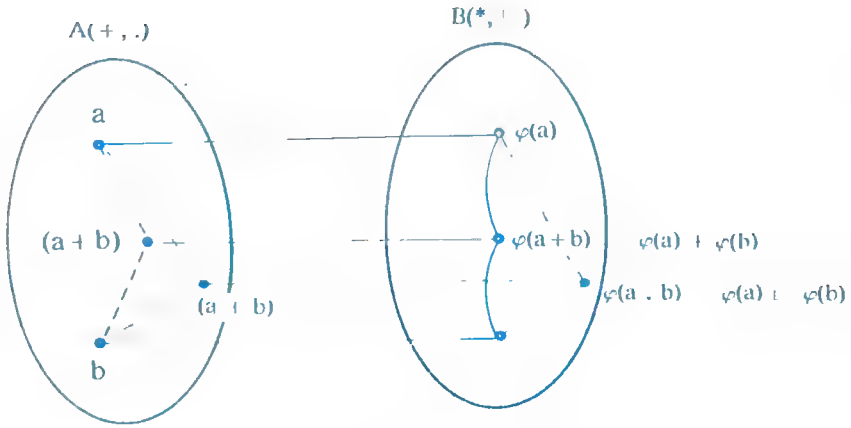
$$\varphi(R) \subset C \qquad R \subset C$$

y como consecuencia $(a, 0) \rightarrow a$, $(1, 0) \rightarrow 1$ luego podemos poner $e = 1$ y nos queda $z = a + bi$

f) Notación binómica de los números complejos

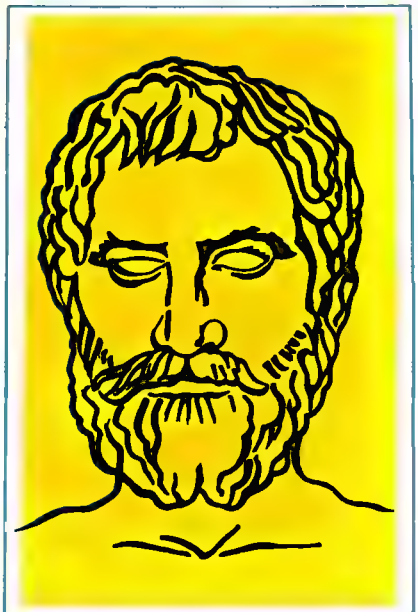
Los complejos del tipo (a, 0) serán los reales y los del tipo (0, b) se llamarán imaginarios puros.

* NOTA En general: Isomorfismo entre los conjuntos A y B.



$\varphi(a + b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \square \varphi(b)$



TALES DE MILETO

FUE un gran matemático, físico, astrónomo y filósofo griego; según algunos historiadores nació en Mileto de una familia noble fenicia, sobre finales del siglo VII y principios del VI (a. de J.C.). Es el más antiguo de los siete sabios de Grecia.

Gran viajero, sus contactos con los egipcios y babilonios dieron base a sus conocimientos de geometría y astronomía.

Observando el poder de atracción de la piedra de imán y la fuerza eléctrica del ámbar al frotarse, llega a la conclusión de que toda la materia está viva. Teoría que se conoce con el nombre de «HILOZOISMO».

Es notable su predicción de un eclipse de sol (seguramente el de 585 antes de J.C., visible en las costas de Asia Menor). Se cree que para ello se basó en la periodicidad de las tablas babilónicas, ya que no pudo conocer las tablas de los eclipses.

(Continúa en página siguiente)

viene de la página anterior

En el campo de la geometría resolvió la forma de conocer la altura de una pirmámide por la comparación de su sombra con la de otro objeto de altura conocida. Dicho metodo le hizo formular el teorema que lleva su nombre.

Era un gran observador. Creyó —quizá porque nació y vivió en puerto de mar— que el agua era el principio y origen de todas las cosas. Las causas que llevaron a esta afirmación fue, que, habiendo dividido la composición del Universo en cuatro elementos: agua, aire, tierra y fuego, y observando que el agua atraviesa los tres estados (sólido, líquido y gaseoso), dedujo que del agua se derivan el resto de los elementos.

Murió Tales de Mileto viendo en un estadio unas competiciones deportivas. Daba gracias, pues, le llevara Dios cuando «ya por su vejez no podía ver la luz de las estrellas».

15.— ELEMENTOS CONJUGADOS

Sea φ una aplicación del conjunto C de los mismos complejos en si mismos, y que cumple las siguientes propiedades

$$C \xrightarrow{\varphi} C$$

Propiedades

1)

$$\varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z') \qquad z + z' = z + z'$$

$$\varphi(z \cdot z') = \varphi(z) \cdot \varphi(z') \qquad z \cdot z' = z \cdot z'$$

luego es un automorfismo.

2) Si z es un número real es igual a su conjugado

$$\text{Si } z = z \quad - \quad z \in R$$

Si es imaginario puro $z + z = 0$

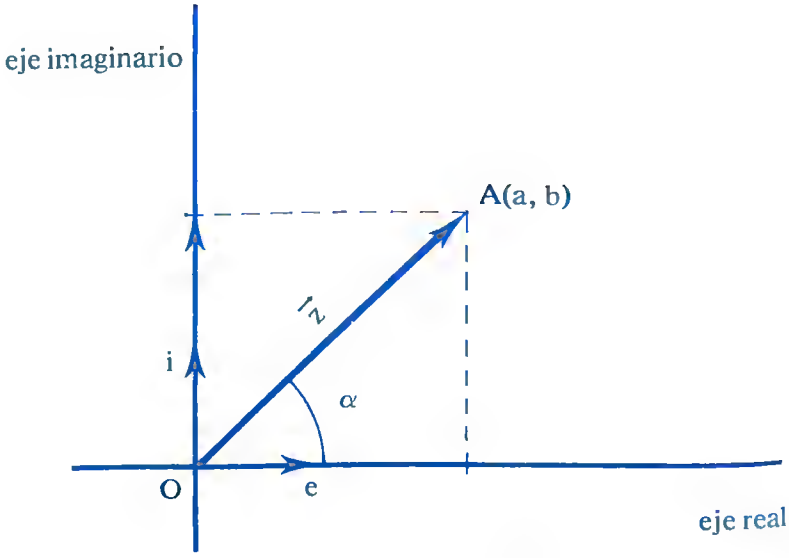
En general ya que $z \cdot z = z^2$ $\qquad z + z \in R$

16.—REPRESENTACION VECTORIAL

Al igual que cada número real tiene una correspondencia con un punto de una recta, cada número complejo tiene una correspondencia biunívoca con cada punto de un plano.

Las coordenadas de ese punto serán lo que se llama AFIJO del n.º complejo.

Si tomamos como ejes coordenados el de abcisas como la componente real y el de ordenadas como el de la componente imaginaria, los vectores unitarios en esas direcciones son el vector e y el i respectivamente. Entonces el complejo $z = (a, b)$ o $z = a + bi$ será un vector $z = a\,e + b\,i$ de componentes a y b que son los afijos del número complejo o lo que es lo mismo el extremo del vector de origen en el centro de coordenadas.

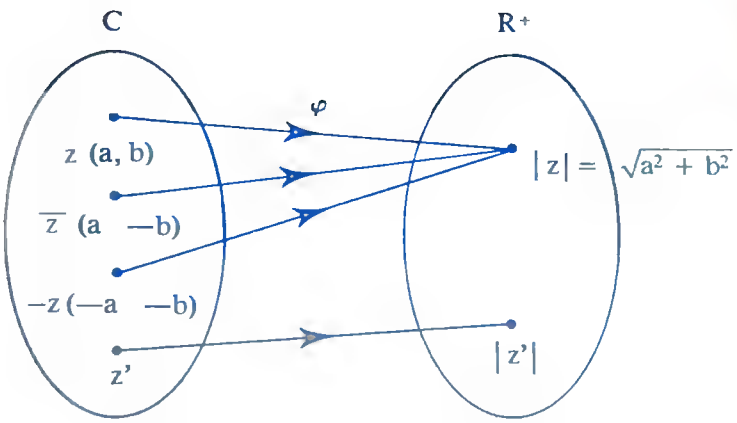


Así a cada número complejo le hacemos corresponder un vector.

El módulo del complejo será el módulo del vector o sea la longitud del segmento OA y se representa por z , ó r. Podríamos ver la aplicación entre el conjunto de los complejos y el de los vectores, viendo que se establece el isomorfismo y la suma de vectores imágenes de los números complejos (según la ley suma de vectores) es igual al vector suma, que es igual a su vez al vector imagen del complejo que es la suma de los complejos dados (según la ley de suma de complejos), e igual para el producto.

Por tanto es una representación del conjunto de los complejos. Por otra parte ya vimos que el conjunto de complejos es espacio vectorial.

17. MODULO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS



Es una aplicación $C \xrightarrow{\varphi} R^+$ $\quad z \in C \rightarrow \varphi(z) = |z|$
ya que para z hay una sola imagen.
pero el número de imágenes es ≥ 1.

Es una aplicación exhaustiva

$z = a + bi \rightarrow |z| = \sqrt{a_2 + b_2}$, (la determinación positiva.)

Tiene las siguientes propiedades

1.ª) $|z| \geq 0$ por la propia definición

2.ª) $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$. Si $z = 0$ como $z \geq 0$ y $a^2 + b_2$ son ≥ 0, a y b = 0 y $z = 0$ y si $z = 0$, a y b = 0 luego $|z| = 0$

3.ª) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$ ya que $a^2 = (-a)^2$; $b^2 = (-b)^2$

4.ª) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Demostracion

si $z = a + bi$ $\quad z' = a' + b'i$

Partimos de que $(ab' - ba')^2 \geq 0$

Desarrollando, $a^2b'^2 + b^2a'^2 - 2aa'bb' \geq 0$

y por tanto, $\quad a^2b'^2 + b^2a'^2 \geq 2aa'bb'$

MOVIMIENTO ILUSORIO

Este particular de un cuadro titulado *Cascada*, del pintor «op» Bridget Riley, ofrece la ilusión del movimiento. El ojo que escruta las líneas negras onduladas las observa moverse alternativamente cerca y lejos. El resultado es un movimiento continuo, particularmente en la parte inferior del cuadro, donde las líneas se encuentran más agrupadas.

PUNTOS FANTASMAS

Puntos fantasmas de color gris aparecen intermitentemente en las interseciones de las líneas blancas, pero en ningún otro lugar de la ilustración. Ello se debe al hecho de que a lo largo de los lados de los cuadrados negros se da un contraste neto y las líneas blancas parecen más claras.

A TRAVES DE LOS ECOS, CONSIGUE «CENTRAR» SU VUELO

El murciélago no es para nada ciego pero podría serlo ya que confiándose a sus sistema ecogoniométrico no tiene dificultad para moverse, dondequiera que se encuentre. En el aire, ya sea que vuele, vaya de caza o directamene bebiendo agua, el murciélago lanza un haz de sonidos de frecuencias comprendidas entre 20.000 y 120.000 ciclos por segundo, una banda similar a la del delfín y mucho más allá de la percepción humana.

De los sonidos emitidos por el murciélago, el hombre puede captar los de baja frecuencia: los advierte como un pequeño gruñido, mientras que se tratan de «bip» emitidos al ritmo de 250 impulsos por segundo. La velocidad con que el murciélago interpreta los ecos de sus impulsos es tal que le permite saber todo lo necesario sobre una eventual presa que se encuentre volando a una veintena de centímetros de distancia; y ello apenas en alguna centésima de segundo.

Cada especie de murciélagos sabe utilizar a su manera esta capacidad. Desde las Indias Occidentales, el escritor inglés Charles Kingsely escribía en 1871: «Al anochecer, invadían el mar cosas negras a tropel... que resultaron ser murciélagos... y tienen fama de saber pescar peces». Kingsley hablaba de hecho de *Noctilio leporinus*, el quiróptero pescedor.

Sumando a los dos miembros de la desigualdad $a^2a'^2 + b^2b'^2$

tenemos, $a^2b'^2 + b^2a'^2 + a^2a'^2 + b^2b'^2 \geq$

$$\geq a^2a'^2 + b^2b'^2 + 2aa'bb'$$

$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) \geq (aa' + bb')^2$, de donde extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros.

$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2} \geq aa' + bb'$. Multiplicando por 2. ambos miembros,

$2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2} \geq 2aa' + 2bb'$ y, sumando a los dos miembros $a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2$ resulta.

$2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2} + (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) \geq a^2 + b^2 +$

$$+ a'^2 + b'^2 + 2aa' + 2bb' \quad \text{luego}$$

$(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2})^2 \geq (a + a')^2 + (b + b')^2$ extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros queda finalmente,

$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2} \geq \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2}$ y por tanto

$|z| + |z'| \geq |z + z'|$ como queríamos demostrar.

5ª) $|z\,z'| = |z| \cdot |z'|$

Demostración

Partiendo de que $z \cdot z^{-1} = 1$

Elevando al cuadrado ambos miembros $|zz'|^2 = |z|^2 \cdot |z'|^2$

$$|zz'|^2 = (zz')(\bar{z}\bar{z}') = (zz') \cdot (\bar{z} \cdot \bar{z}') =$$

$= (z \cdot \bar{z}) \cdot (z \cdot \bar{z})$, y sabiendo que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ tendremos que

$|zz'|^2 = |z|^2 \cdot |z'|^2$ y extrayendo la raíz cuadrada

$$|zz'| = |z||z'|, \text{ como queríamos demostrar.}$$

6º) $|z^{-1}| = |z^{-1}$, si $z \neq 0$

Demostración partiendo de que $z \cdot z^{-1} = 1$

$|z \cdot z^{-1}| = 1$ y por la propiedad

$$|z \cdot z^{-1}| = |z||z^{-1}|$$

$$\text{luego } |z| \cdot |z^{-1}| = 1 \qquad \text{si } z \neq 0$$

$$|z^{-1}| = \frac{1}{z} = |z|^{-1}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

si z es real , su módulo coincide con el valor absoluto de a.

$z \in R$

$$|z| = |a|$$

$z = (a, 0)$

18.—FORMULA MODULO-ARGUMENTAL O TRIGONOMETRICA

Dado el complejo z = (a, b) y en forma binómica z = a + bi, este complejo en forma trigonométrica sería z = (cosα + isenα) y en fórmula módulo argumental z = siendo el módulo del vector o sea el segmento OA que es $= \sqrt{a^2 + b^2}$ y α el argumento o sea el ángulo que forma el eje OX con el segmento OA admitiendo como positivo el giro de sentido contrario a las agujas de un reloj contado a partir del eje OX.

Por tanto tg $\alpha = \frac{b}{a}$ y $\alpha = \text{arc tg } \frac{b}{a}$.

De esta manera podemos pasar de forma binómica a módulo-argumental o trigonométrica y viceversa.

$$z = a + bi \qquad \begin{matrix} a = \rho \cos\alpha \\ b = \rho \operatorname{sen}\alpha \end{matrix} \qquad \begin{matrix} z = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \\ z = \rho \end{matrix}$$

y viceversa

19.—OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA TRIGONOMETRICA

19.1. Suma de números complejos en forma trigonométrica

Sean los complejos:

$$\left.\begin{matrix} z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \\ z_2 = \rho_2(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) \end{matrix}\right\}$$

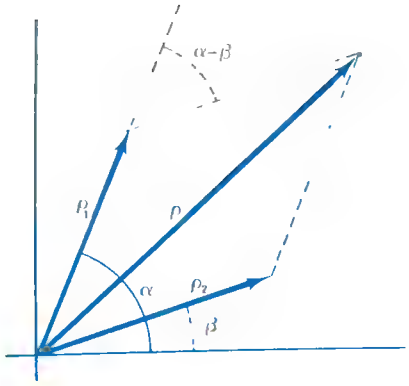
Se llama suma de estos complejos al complejo:

$$z = z_1 + z_2 = \rho_1(\cos\alpha + \rho_2 \cos\beta) + i(\rho \operatorname{sen}\alpha + \rho_2 \operatorname{sen}\beta)$$

El módulo vemos que es:

$$\sqrt{\rho_1^2\cos^2\alpha + \rho_2^2\cos^2\beta + \rho_1^2\operatorname{sen}^2\alpha + \rho_2^2\operatorname{sen}^2\beta + 2\rho_1\rho_2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha - \beta)}$$

como saldrá por la representación vectorial.



19.2. Producto

El producto de complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos:

$$\left.\begin{matrix} z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1) \\ z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2) \end{matrix}\right\}$$

BUENA CENA

Emitiendo para poder recibir los ecos, un murciélago pescador fauces abiertas y orejas tiesas, cae sobre su presa: un trozo de pez enfilado en un hilo de hierro. En un momento lo atrapa. El sistema ecogoniométrico del murciélago no penetra en el agua, y por consiguiente no puede localizar los objetos completamente sumergidos; sin embargo, es suficiente que la presa aparezca poco más de un milímetro sobre la superficie del agua o que un pez, asomándose, cree una ligera onda, para que pueda actuar de inmediato.

LA HELICE: UN ALA RETORCIDA

El factor principal del vuelo es el movimiento hacia adelante: un avión debe moverse con bastante velocidad para que el viento relativo pueda crear la capacidad necesarioa para su mantenimiento en el aire. Pero ¿qué es lo que lo hace moverse? Sorprendentemente la respuesta viene dada otra vez por la capacidad: en este caso se trata de capacidad dirigida hacia adelante, sobre las palas de la hélice en movimiento vortiginoso. Puede imaginarse una hélice como un ala en rotación en un plano vertical: la capacidad generada se llama «tracción».

Este hecho, puede comprenderse más fácilmente considerando una sección de hélice. Nótese que el perfil es del todo similar a un perfil clásico de ala: convexo de la parte que gira hacia adelante, relativamente plano de la otra. Cuando la hélice está en rotación, desde la parte convexa de las palas, que corresponde a la parte superior del ala, se crea una zona de depresión y se desarrolla así un empuje hacia adelante.

Pero, ¿Porqué la hélice está retorcida? La respuesta es simple: como todo lo que rote alrededor de un eje central, las partes externas de la hélice se mueve más velozmente en el aire que las internas; en otras palabras, el aire es desplazado con mayor velocidad en les extremidades que cerca del eje. Ello, combinado con la velocidad de avance del avión mismo, fuerza una leve inclinación cerca de la punta; sin embargo, en las proximidades del eje las palas deben tener mayor inclinación para producir la máxima tracción. La forma retorcida de la hélice nace de la necesidad de variar la inclinación desde la extremidad hasta el interior de la pala.

$$z_1 \cdot z_2 = {}_1\cos\alpha_1 \cdot {}_2\cos\alpha_2 - {}_1\operatorname{sen}\alpha_1 - {}_2\operatorname{sen}\alpha_2) +$$

$$+ i({}_1{}_2\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_2) =$$

$$= {}_1{}_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2$$

19.3. Cociente

El cociente de complejos es otro complejo que tiene módulo el cociente de los módulos y como argumento la diferencia de los argumentos.

Demostración

$$\text{sean} \begin{cases} z_1 = {}_1(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1) \\ z_2 = {}_2(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2) \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{{}_1}{{}_2} \cdot \frac{\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i\operatorname{sen}\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2)(\cos\alpha_2 - i\operatorname{sen}\alpha_2)} =$$

$$= \frac{\rho}{\rho}\left[(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$$

19.4.—Potencia de números complejos

$$z_1^n = \rho_1^n(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1)^n = \rho_1^n(\cos n\,\alpha_1 + i\operatorname{sen} n\,\alpha_1)$$

ya que es el produto de n complejos iguales.

Es un complejo que tiene como módulo la potencia n-sima del módulo y como argumento n veces el argumento.

De aqui la fórmula de Moivre.

$$(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1)^n = \cos n\,\alpha_1 + i\operatorname{sen} n\,\alpha_1$$

válida para todo n entero.

Demostración.

Para n número natural es evidente.

Para n entero negativo $n = -m$

$$(\cos w + i\operatorname{sen} w)^{-m} = \frac{1}{(\cos w + i\operatorname{sen} w)^m} =$$

$$= \frac{1}{\cos m\,w + i\operatorname{sen} m\,w} = \frac{\cos m\,w - i\operatorname{sen} m\,w}{\cos^2 m\,w + \operatorname{sen}^2 m\,w} =$$

$$= \cos m\,w - i\operatorname{sen} m\,w = \cos(-nw) - i\operatorname{sen}(-nw) =$$

$= \cos n\,w + i\operatorname{sen} n\,w$ luego la fórmula de Moivre vale para todo entero.

APLICACION

$$(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\alpha_1)^n = \cos n\,\alpha_1 + i\,\text{sen}\,n\,\alpha_1$$

Desarrollando por el binomio de Newton.

$$= \cos^n \alpha_1 + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha_1\, i\,\text{sen}\alpha_1 + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha_1\, i^2\,\text{sen}^2\,\alpha_1 + \ldots$$

$$+ \ldots + i^n \,.\, \text{sen}^n\alpha_1 = \cos n\,\alpha_1 + i\,\text{sen}\,n\,\alpha_1$$

Igualando términos.

$$\cos n\,\alpha_1 = \cos^n \alpha_1 - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha_1 \,.\, \text{sen}\,\alpha_1 + \ldots$$

$$\text{sen}\,n\,\alpha_1 = n\cos^{n-1}\alpha \,.\, \text{sen}\alpha + \ldots + \ldots$$

20.—OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA MODULO-ARGUMENTAL.

OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

20.1.—Producto de números complejos.

"El producto de dos números complejos en forma polar, es otro complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos".

Si:

$$c = m_\alpha \text{ y } c' = m'_{\alpha'}$$

se cumplirá:

$$c \cdot c' = m_\alpha \cdot m'_{\alpha'} = (m \cdot m')_{\alpha+\alpha'}$$

Así pues

$$\boxed{c \cdot c' = (m \cdot m')_{\alpha+\alpha'}}$$

Ejemplo

Hallar el producto de los complejos $\sqrt{3}_{45^\circ} \cdot \sqrt{6}_{20^\circ}$

Solución

$$\text{módulo} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2}$$

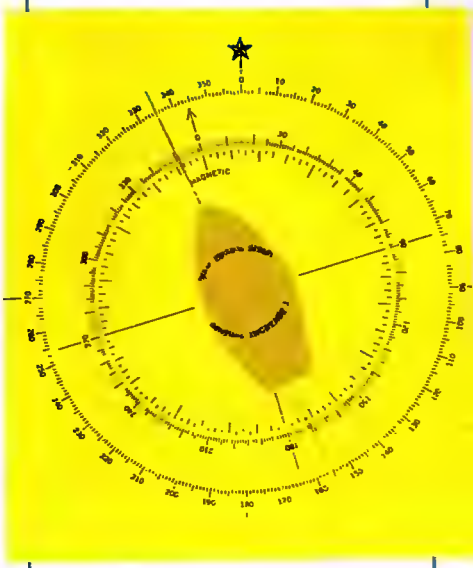
$$\text{módulo } 3\sqrt{2}$$

$$\text{argumento} = 45^\circ + 20^\circ = 65^\circ$$

$\left(3\sqrt{2}\right)_{65^\circ}$ Complejo producto en forma polar.

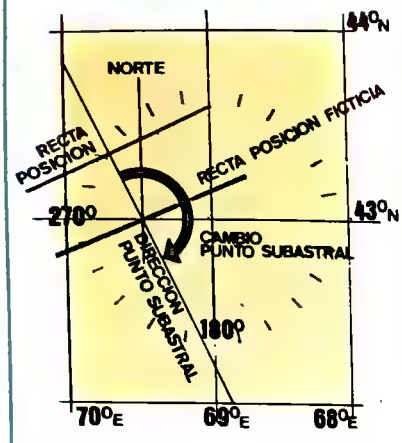
Ejemplo

Dados dos complejos $2_{20^\circ 5'}$ y $4_{8^\circ 45'}$, encontrar el complejo producto, expresándolo tanto en forma polar, como trigonométrica.



LOS DOS NORTES DEL NAVEGANTE

La aguja de la brújula indica el Norte magnético. En la figura superior que muestra el contorno de una nave sobre la rosa de la brújula, la diferencia entre los dos polos o declinación es de 15º 45', Oeste; esto significa que en este punto de la Tierra el Norte magnético está desplazado 15º 54' hacia el Oeste respecto al Norte verdadero: esto es, los 351º que se leen en la brújula corresponden a 335º 15' respecto al Norte geográfico. El diámetro vertical trazado sobre la brújula es paralelo a la nave e indica su ruta.



LA RECTA DE POSICION

El navegante observa el sol con el sextante y determina su altura, que es de 30º 10'. Dado que un minuto de grado es igual a una milla marina, aquel sabe que se encuentra en un cierto punto sobre un círculo muy grande que tiene un radio de 1.810 millas y que tiene por centro el punto de la tierra donde el sol está en el zenit en aquel instante. El círculo es tan grande que el arco sobre el que el navegante se encuentra puede considerarse, en la práctica, una recta (recta de posición). Para establecer la inclinación de esta recta, procederá así: establece a través de las tablas que el centro del círculo está a 158º respecto del Norte desde su presunta posición (flecha azul a la izquierda). Traza una recta a 158º de la dirección Norte, que pasará por el punto de su presunta dirección y que es un radio del círculo considerado. Ahora bien, la recta de posición de la nave debe ser perpendicular a este radio y tangente al círculo. En este momento, el navegante consulta las tablas y encuentra que la altura del sol desde la presunta posición en el instante de la observación habla sido de 30º, por lo tanto 10' menos de la real. Por consiguiente, la recta de posición debe desplazarse 10' más lejos respecto a la presunta posición.

Solución

$$2_{20°5'} \cdot 4_{8°45'}$$

Módulo resultante: $2 \cdot 4 = 8$

Argumento resultante: $20°5' + 8°45' = 28°50'$

Forma polar: $8_{28°50'}$

Forma trigonométrica: $8\,(\cos 28°50' + \operatorname{sen} 28°50'\mathrm{i})$

Ejemplo

Dados dos complejos $3_{20°36'}$ y $2_{9°24'}$, encontrar el complejo producto, expresándolo en forma binómica y en forma cartesiana.

Solución

$$3_{20°36'} \cdot 2_{9°24'}$$

Módulo resultante $= 2\sqrt{3}$

Argumento resultante $= 20°36' + 9°24' = 30°$

Por tanto:

$$2\sqrt{3_{30°}} = 2\sqrt{3}\,(\cos 30° + \operatorname{sen} 30°\mathrm{i})$$

Sustituimos los cosenos y senos por sus valores

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

Operando, queda: $3 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ Forma binómica

$3, \sqrt{3}$ Forma cartesiana

20.2.—Cociente de números complejos,

"El cociente de dos complejos en forma polar, es otro complejo que en su forma polar, tendrá como módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos del dividendo y divisor".

$$c = m_\alpha \quad \text{y} \quad c' = m'_{\alpha'}$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{m_\alpha}{m'_{\alpha'}} = \left(\frac{m}{m'}\right)_{\alpha - \alpha'}$$

Por tanto

$$\frac{c}{c'} = \left(\frac{m}{m'}\right)_{\alpha - \alpha'}$$

Ejemplo:

Hallar el complejo cociente de $2_{/180°}$ y $\sqrt{2}_{30°}$

Solución

$$\text{Módulo resultante} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{2}$$

$$\text{Argumento resultante} = 180° - 30° = 150°$$

en forma polar $\boxed{\sqrt{2}_{150°}}$

Ejemplo

Expresar el complejo cociente de $2_{120°6'}$ y $3_{4°27'}$ en forma trigonométrica

Solución

$$\text{Módulo resultante} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Argumento resultante} = 120°6' - 40°27' =$$

$$119°66' - 40°27' = 79°39'$$

$$\text{Forma polar} = \left(\frac{2}{3}\right)_{79°39'}$$

$$\text{Forma trigonométrica} = \boxed{\frac{2}{3}(\cos 79°39' + \operatorname{sen} 79°39i)}$$

Ejemplo:

Expresar el complejo cociente de $8_{800°}$ y $4_{35°}$, en todas las formas conocidas y su representación.

Solución

$$\text{Módulo resultante} = \frac{8}{4} = 2$$

- Argumento resultante $= 800° - 35° = 765°$

$$\text{Forma polar} = \boxed{2_{765°}}$$

$$\text{Forma trigométrica} = \boxed{2(\cos 765° + \operatorname{sen} 765°i)}$$

Para encontrar las formas, binómica y cartesiana, es necesario saber cuánto vale el seno y el coseno del ángulo 765°

$$765° = 2 \cdot 360° + 45°$$

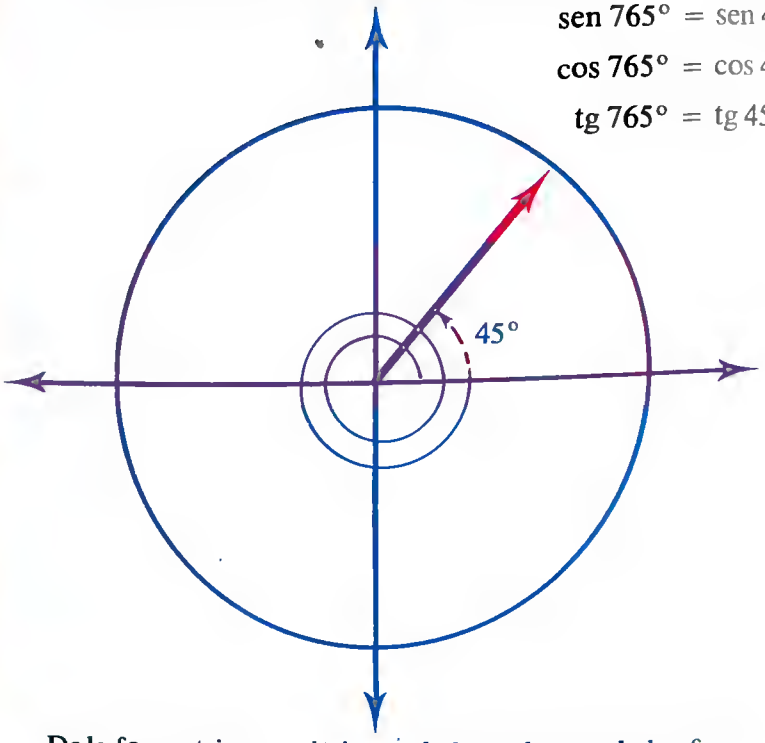
LA ESCALA DECIBEL

0 umbral auditivo.
10 respiración normal.
20 murmullo de hojas al viento.
30 sala cinematográfica desierta.
40 barrio residencial, de noche.
50 sala de restaurante silenciosa.
60 conversación entre dos personas.
70 tráfico intenso.
80 aspirador del polvo.
90 catarátas del Niágara.
100 convoy del Metropolitano.
120 helicóptero en vuelo.
130 ametralladora, desde cerca.
140 avión militar en vuelo.
160 galería del viento.
175 cohete espacial.

Indices de intensidad sonora de algunos sonidos, expresados en decibelios. El silencio casi absoluto, representado por cero decibelios, solamente puede realizarse en particulares ambientes antieco. Por encima de los 120 decibelios —zona más oscura— el rumor es tan intenso que se advierte como solicitación física del oído; más allá de los 130 decibelios la sensación instaura el dolor y puede dañar un oído que no se proteja en condiciones.

de 765° tiene las mismas razones que uno de 45°.

$$\text{sen } 765° = \text{sen } 45°$$
$$\cos 765° = \cos 45°$$
$$\text{tg } 765° = \text{tg } 45°$$



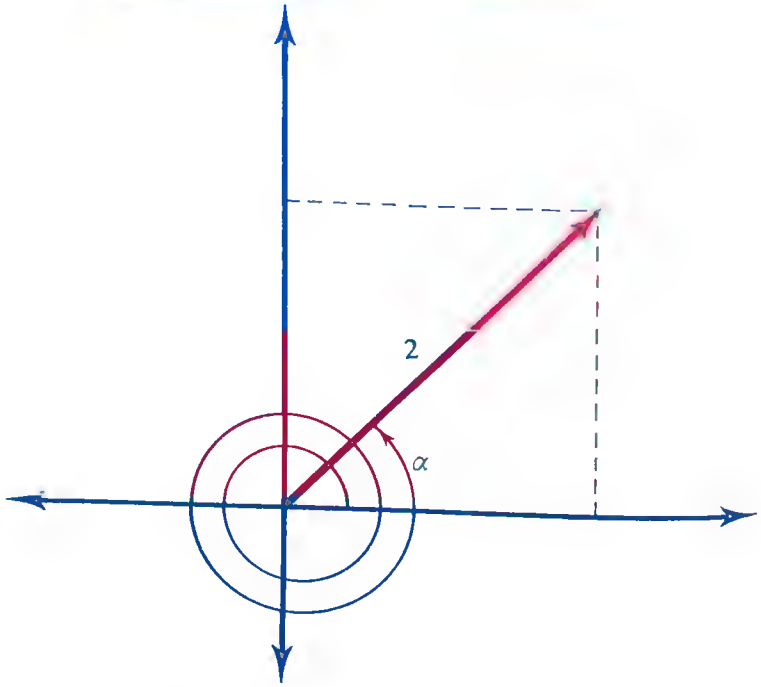
De la forma trigonométrica se deduce el resto de las formas:

$$2(\cos 765° + \text{sen } 765\text{i}) = 2(\cos 45° + \text{sen } 45°\text{i})$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{i}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\,\text{i}$$

$= \sqrt{2} + \sqrt{2}\text{i}$ — Forma binómica

$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ — Forma polar



LA PALANCA

Las antiguas palancas simples: una formidable potencia bajo múltiples formas.

«¿Cómo es que el dentista extrae más fácilmente los dientes sirviéndose de las pinzas que con las manos desnudas?» Se preguntó un pensador griego. Arquímedes dió la respuesta cuando dijo: «Pesos iguales a distancias desiguales se inclinan hacia el peso que se encuentra a mayor distancia». En ambos casos, el problema de fondo se refiere a la máquina más antigua del mundo: la palanca.

Toda palanca tiene un punto fijo llamado punto de apoyo (en el ejemplo citado el pernio de las pinzas), y recibe la acción de dos fuerzas: la potencia y la resistencia (respectivamente, los músculos de la mano del dentista y, obviamente, el diente).

En su forma más simple, el palanquín, la palanca permite multiplicar el efecto de una pequeña potencia para vencer una gran resistencia. Si la potencia se encuentra entre el punto de apoyo y la resistencia, cambia la relación: sacar una trucha del agua con un movimiento de la caña es pescar precisa, respecto a la resistencia ofrecida por el pez, un esfuerzo, es decir, una potencia mayor, y tanto mayor cuanto más distante se encuentre la trucha.

20.3.—Potencia de números complejos.

"Un número complejo elevado a una potencia, es otro complejo, que tiene como módulo, el módulo anterior elevado a la potencia y de argumento, el argumento anterior multiplicado por el exponente".

$$c^n = (m_\alpha)^n = (m^n)_{n\alpha}$$

$$\boxed{c^n = (m^n)_{n\alpha}}$$

Ejemplo

Encontrar la sexta potencia del complejo $\sqrt{3}_{120^\circ}$, expresándola en forma binómica y representándola gráficamente

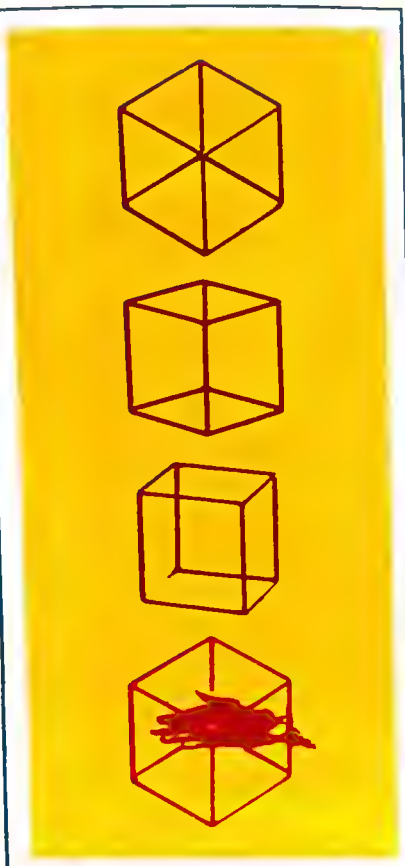
Solución

$$c = \left(\sqrt{3}_{120^\circ}\right)^6$$

- Módulo resultante $= (\sqrt{3})^6 = \sqrt{3^6} = \sqrt{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2} = 3^3 = 27$

ESCALERAS IMPOSIBLES

En el dibujo surrealista de Escher, varias escaleras se ramifican en ángulos y direcciones imposibles. Una escena similar, aunque pueda dibujarse —y ofrecer una lógica seductora en algunas de sus partes— es imposible que exista en tres dimensiones. Lo mismo puede decirse de otro dibujo, más simple que el anterior, pero igualmente imposible. Es inconcebible que una escalera acabe donde comienza.



CUATRO IMAGENES DE UN CUBO

Se trata del mismo cubo de hilo metálico, visto desde diferentes perspectivas. La primera figura parece un hexagono, pero la segunda podría tener dos o tres dimensiones. La angulación de la tercera figura sugiere decididamente la tridimensionalidad, mientras que la última (igual a la primera) adquiere profundidad apenas introducida la mano.

- Argumento resultante $= 120 \cdot 6 = 720°$

Complejo resultante en forma polar $\Big\}$ $\boxed{(27)_{720°}}$

En forma trigonométrica:

$$\boxed{27(\cos 720° + \operatorname{sen} 720°\,i)}$$

Para encontrar la forma binómica, es necesario saber el valor del seno y coseno de 720°

$$720° = 2 \cdot 360 + 0°$$

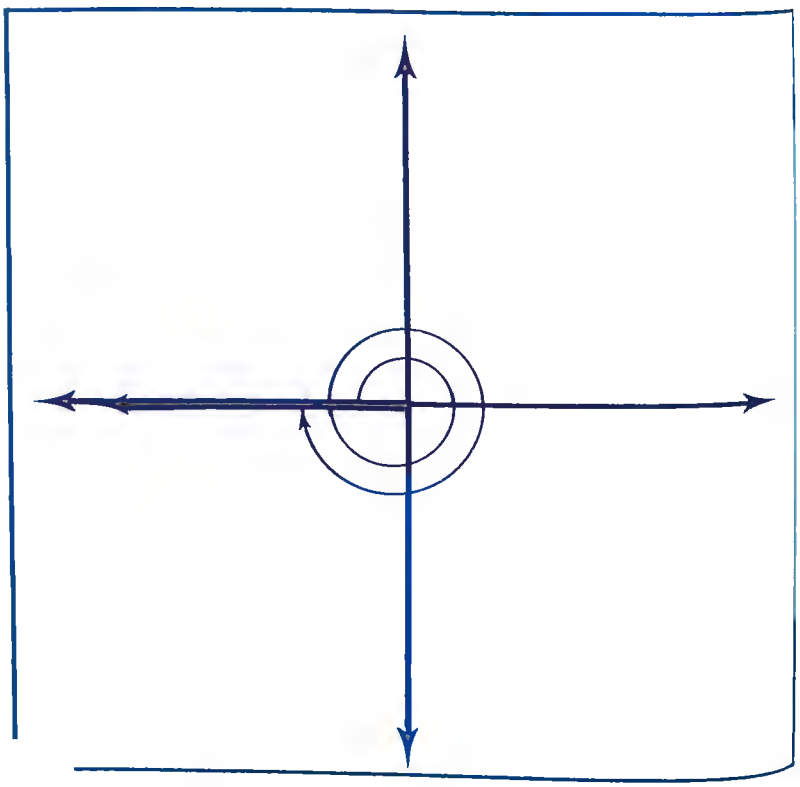
Por tanto:

$$\operatorname{sen} 720° = \operatorname{sen} 0° = 0$$
$$\cos 720° = \cos 0° = 1$$

Sustituyendo valores en la expresión trigonométrica, tendremos:

$$27\,(1 + 0i) = 27 + 0i$$

forma binómica $= \boxed{27 + 0i}$



21.—RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

21.1.—Raíz cuadrada de un complejo en forma binómica.

$$\text{Dado } z = a + bi \in C$$

$$\sqrt{z} = u \in C$$

$$\text{y tal que } u = x + iy$$

$$\text{y por tanto } w^2 = z;\ (x + yi)^2 = a + bi \text{ de donde}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array}\right\}$$ Para resolverlo se puede hacer de dos formas.

1.ª Ponemos

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \alpha \\ -y^2 = \beta \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = a \\ -4\alpha\beta = b^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = a \\ \alpha \cdot \beta = -\dfrac{b^2}{4} \end{array}\right\}$$

Por las fórmulas de Cardano-Viette de resolución de ecuaciones α y β serán las raíces de la ecuación

$$n^2 - an - \frac{b^2}{4} = 0 \qquad \text{de donde}$$

$$n = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{cases}$$

y por tanto

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$$y = \pm \sqrt{-\left(\frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b_2}}{2}}$$

$$y_1 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

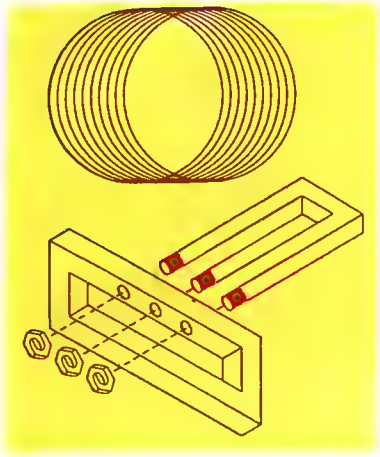
y las soluciones son

$$\begin{cases} (x_1, y_1) \\ (x_1, y_2) \\ (x_2, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{cases}$$

BROMAS GASTADAS A LA VISTA

La pila de bloques de madera de la ilustración superior puede percibirse con los lados blancos en alto, o bien, en bajo, fenómeno llamado perspectiva reversible. Este fenómeno hace además que el muelle parezca cambiar de posición. Los peces del dibujo ofrecen la impresión de moverse primero un un sentido y luego en otro.

(Continúa en página siguiente)



viene de la página anterior

Pero el trídente, la pieza de sostén y las tuercas son rechazadas por el cerebro como figuras imposibles.

LOCALIZAR LA DIRECCION DE LOS SONIDOS

Este localizador de la dirección de los sonidos tiene sus conos receptores muy distanciados y son capaces de recoger sonidos en mayor cantidad que los pabellones auriculares. Patentado alrededor de 1880, se usaba en la marina en caso de niebla para determinar por dónde llegaba la sirena de advertencia de otras naves.

De estas 4 soluciones solo 2 son válidas. Las que hagan que $x \cdot y$ sea, del mismo signo que b.

Las otras 2 soluciones extrañas han sido introducidas al elevar al cuadrado.

2) Otra forma de resolverlo es la más elemental

despejar $x = \frac{b}{2y}$ y sustituir quedando

$$4ay^2 + 4y^4 - b^2 = 0 \qquad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$t^2 + at - \frac{b^2}{4} = 0 \qquad t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \qquad x = \frac{b}{2y}$$

Igualmente de las 4 soluciones solo dos son válidas las que hagan $x \cdot y$ del mismo signo que b.

II) Raíces enésimas de un complejo en forma trigonométrica.

Complejo $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.

$\sqrt[n]{z} = \omega = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$

$\omega^n = z$; $\rho^n(\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega) = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ de donde

$$\left.\begin{aligned} \rho^n &= r \\ n\omega &= \alpha + 2K\pi \end{aligned}\right\} \qquad r = \sqrt{\rho} \qquad \omega = \frac{\alpha}{n} + \frac{2K\pi}{n} \qquad K \in N$$

Vemos que como $\rho > 0$ y $r > 0$ sólo existe un r, luego todas las raíces tienen el mismo módulo.
¿Cuántas raíces habrán? tantas como argumentos se puedan hallar.

$$K = 0 \qquad \omega_0 = \frac{\alpha}{n}$$

$$K = 1 \qquad \omega_1 = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

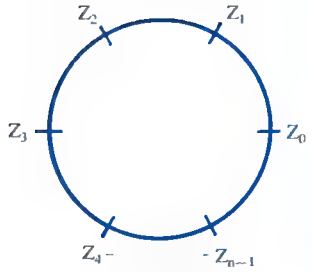
$$K = (n-1) \qquad \omega_{n-1} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + (2\pi - \frac{2\pi}{n})$$

$$K = n \qquad \omega_n = \frac{\alpha}{n} + 2\pi \Rightarrow \omega_n = \omega$$

luego en total serán n raíces que son para los valores $K = 0, 1, \cdots (n-1)$.

Todo complejo no nulo tiene n raíces enésimas distintas.

Las raíces serán los puntos en que queda dividida la circunferencia de radio ρ en n partes.



Casos particulares

Raíces de números reales.

1) Reales positivos

Dado un real positivo $a \rightarrow z = a_0$ luego sus n raíces enésimas serán: $\sqrt{a}$ de módulo y argumentos respectivamente

$$0, \frac{2\pi}{n}, \ldots (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

1.1.— Si n es par $n = 2n'$

obtendremos dos raíces reales: la de argumento 0 / la de argumento π

que es cuando $K = n' \rightarrow \frac{n'2\pi}{2n'}$

Luego la una es positiva y la otra negativa.

1.2.— si n es impar solo existirá una raíz real que será positiva (la de argumento 0).

2) Reales negativos.

Dado un real negativo $-a \qquad z = a_\pi$

Módulo $\sqrt{a}$,

argumento $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots \frac{2K+1}{n}n \ldots$

2.1.—Si n es par: como $2K + 1$ siempre es impar $\frac{2K+1}{n}\pi$ no será nunca múltiplo de π luego no existirá ninguna raíz real.

2.2.— Si n es impar: existirá un K tal que $2K + 1 = n$, luego el argumento será π y por tanto habrá una raíz real negativa.

22.—RAICES ENESIMAS DE LA UNIDAD.

$$z = 1 = 1_0$$

Todas las raíces tendrán de módulo 1 y de argumento

$$0, \frac{2\pi}{n}, \ldots \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_1, \ldots \epsilon_k = \cos\frac{2K\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{n}, \ldots \epsilon_{n-1}$$

ESCUCHA BIAURICULAR

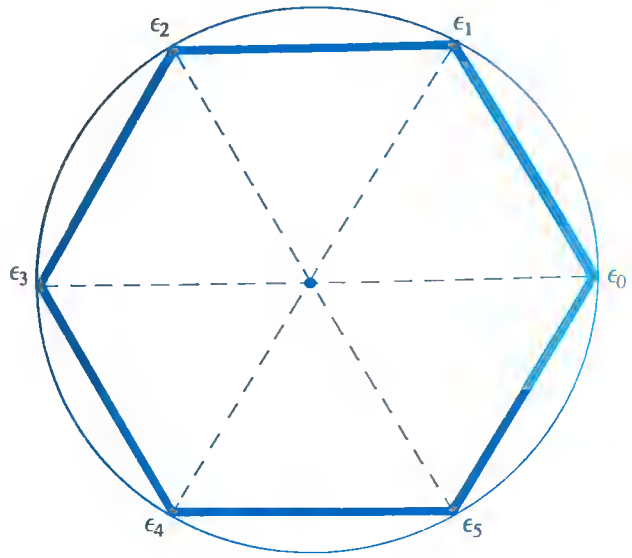
Escucha a través de dos auriculares: el sujeto, situado en el centro de esta jaula rotatoria debe localizar el sonido emitido por un teléfono que gira en torno a su cabeza. Construído en 1901 por Arthur H. Pierce, un psicofísico americano, el aparato sirvió en centenares de experimentos destinados a examinar la facultad de fonolocalización biauricular. Entre otras cosas, se demostró la dificultad de localizar el origen del sonido cuando éste se encontraba de frente o a espaldas del sujeto, porque ambos oídos perciben a la vez el mismo sonido.

UN SISTEMA DE COLORES

Esta rueda de colores fue un primer intento de ilustrar la relación existente entre todos los colores visibles. Moses Harris, en el siglo XVIII, unió las extremidades del espectro formando un círculo. Cada uno de los 18 colores del círculo se muestra con diferentes intensidades, y los tres triángulos del centro confirman su teoría de que todos los demás colores pueden formarse con el rojo, azul y amarillo (colores base).

Los afijos en el plano de Gauss son los vértices de un polígono regular de n lados.

Y los complejos ϵ_K (K = 0, ... n—1) son las raíces enésimas de la unidad.



El conjunto de las raíces enésimas de la unidad es un grupo multiplicativo cíclico.

NOTA: Un grupo se dice monógeno si para la ley multiplicación se puede engendrar por las potencias de un elemento distinto del elemento neutro. Tiene a la fuerza que ser abeliano.

Un grupo monógeno finito se llama cíclico.

Se llama orden de un elemento al exponente p tal que a^p de el elemento neutro.

En un grupo cíclico el orden de un elemento es un divisor del orden del grupo. Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico. En un grupo finito todo elemento engendra un grupo cíclico.

En este grupo el elemento neutro para la ley de la multiplicación es $1 = \epsilon_0$

$$\epsilon_K = \cos \frac{2K\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{n} = (\epsilon_1)^K$$

$$\text{ya que } \epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_1^{\,n} \text{ y siempre } \epsilon_0 = (\epsilon_K)^n$$

Es un grupo para la ley (.), ya que, es ley de composición interna.

$$\epsilon_K \cdot \epsilon_{K'} = \cos \frac{2\pi}{n}(K + K') + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}(K + K')$$

que es otra K'' ya que $K + K' < n$ es K'' y si no será $K + K' - n = K''$

23.—PROPIEDADES DE LAS RAICES ENESIMAS DE LA UNIDAD.

1) Los productos, cocientes y potencia (de exponente natural) de las raíces enésimas de la unidad son también raíces de orden n.

a) Sean α, β unas raíces enésimas de la unidad

$\alpha^n = 1 \qquad \beta^n = 1 \qquad (\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n = 1$ luego el producto también es una raíz enésima.

b) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n} = 1$ luego el cociente también es raíz enésima.

c) $(\alpha^p)^n = (\alpha^n)^p = 1$ luego la potencia p-esima también es raíz n-esima.

2) Calculada una raíz n-esima de un complejo se obtienen todas las raíces multiplicando por las n-esimas raíces de la unidad.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{1}$$

3) Si h es entero

$$S_n = \epsilon_0^h + \epsilon_1^h + \ldots + \epsilon_{n-1}^h = \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i^h \begin{cases} n & \text{Si h es múltiplo entero de n} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Demostración

Sabemos que $\epsilon_0^h = 1$ y que $\epsilon_K = \epsilon_1^K$

por tanto $\epsilon_2 = \epsilon_1^2$, $\epsilon_3 = \epsilon_1^3$ ...

$$S_n = 1 + \epsilon_1^h + \epsilon_1^{2h} + \ldots + \epsilon_1^{(n-1)h} =$$

$$= \frac{\epsilon_1^{(n-1)h} \cdot \epsilon_1^h - 1}{\epsilon_1^h - 1} = \frac{\epsilon_1^{nh} - 1}{\epsilon_1^h - 1}$$

a) Si h es múltiplo entero de n, $\epsilon_1^h = 1$, $\epsilon_1^{nh} = 1$, luego es indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y quitando la indeterminación queda n, lo que se puede ver también ya que $\epsilon_1^h = 1$, $\epsilon_1^{2h} = 1$...

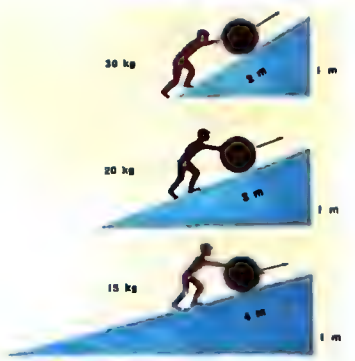
$$S_n = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n} = n$$

b) Si h no es múltiplo entero de n

$$\epsilon_1^h \neq 1 \qquad \epsilon_1^h - 1 \neq 0 \qquad \epsilon_1^{nh} = 1$$

luego $S_n = 0$

En cuanto a los valores negativos de h basta tener en cuenta que $\epsilon_1^{-p} = \epsilon_1^{n-p}$ luego la suma



LA MATEMATICA DEL PLANO INCLINADO

Los dibujos de la derecha representan un hombre que empuja un cilindro por un plano inclinado sin frotamiento. El cilindro pesa 60 kilogramos. La relación entre la altura y la hipotenusa del triángulo lo determina la potencia (en el sentido que indica la fecha) que el hombre debe aplicar para hacer subir el cilindro a través del plano a velocidad constante. Primera figura: la solución es, naturalmente, la mitad de 60, o sea 30 kilogramos. Segunda figura: un tercio de 60, esto es 20 kilogramos. Tercera figura: un cuarto de 60, es decir 15 kilogramos.

PITAGORAS

PARA Pitágoras la aritmética era la ciencia de los números. El estudio de los números primos y los compuestos. Matemático y filósofo griego del siglo VI a. de J.C., nació en Samos y se le atribuye la paternidad de la tabla de múltiplos o de multiplicar. A los adeptos o alumnos se les llamó Mathematikoi o Matemáticos. Su trabajo dio origen a investigaciones aritméticas, geométricas, físicas y astronómicas.

Dividió los números en dos clases: los imperfectos o primos que son los divisibles por la unidad y por sí mismo y los perfectos o divisibles por dos o más números además de por la unidad, tal como 4-12-18-24, etc.

En geometría, descubrió el teorema que lleva su nombre: «En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ($a^2 + b^2 = c^2$).»

Asoció la Filosofía con la Matemática y definió que: «Todo es NUMERO».

En Astronomía llegó a la conclusión de que las constelaciones son combinaciones numáricas.

Todas las cosas son también interpretación númerica, tanto los objetos físicos como todos aquellos de estructura definida, como por ejemplo un número de educación, otro de hijos. En suma; pues, sus números fueron fichero o vivero de magia para las filosofías.

$$\epsilon_1^h + \epsilon_2^h + \ldots + \epsilon_{n-1}^h = \epsilon_1^{-p} + \epsilon_1^{-2p} + \ldots + \epsilon_1^{-(n-1)p} =$$

$$= \epsilon_1^{n-p} + \ldots + \epsilon_1^p$$ o sea los mismos sumandos pero en otro orden.

24.—RAICES PRIMITIVAS DE LA UNIDAD. PROPIEDADES

Las raíces n-esimas de 1 se dividen en dos clases:

a) las que no son de orden inferior a n y se llaman primitivas de orden n. Son los elementos de orden n de grupo cíclico.

b) Las demás raíces que serán primitivas de orden inferior n.

Propiedades

1) Se obtienen todas las raíces primitivas de orden n dando a K todos los valores primos con n y menores que n en la fórmula

$$\epsilon_K = \cos \frac{2K\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{n}$$

Si δ es una raíz de orden h $\quad \delta^h = 1$

$$\text{luego } \delta^h = \cos \frac{2Kh\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2Kh\pi}{n} = 1$$

$Kh = n$

— Si K es primo con n eso solo se cumple cuando $h = n$, luego serán raíces primitivas de orden n.

— Si K no es primo con n y llamamos K' y n' a los cocientes de K y n por su máximo común denominador se obtiene

$\delta = \cos \frac{2K'\pi}{n'} + i \operatorname{sen} \frac{2K'\pi}{n'}$ siendo K' primo con n' y es δ raíz primitiva de orden $n' < n$.

2) Toda raíz primitiva de orden n es raíz de cualquier orden n y solo de éste.

3) Se obtienen todas las raíces de orden n calculando las potencias $\epsilon_1, \epsilon^2, \ldots \epsilon^n$ de una raíz primitiva cualquiera de orden n.

Todos son raíces de orden n porque el producto de raíces n-esimas de orden n es una raíz de orden n ya que si ϵ es raíz de orden n

$$\epsilon^n = 1 \qquad (\epsilon^2)^n = (\epsilon^n)^2 = 1 \ldots$$

Por otra parte todas son distintas entre si ya que $\epsilon^a \neq \epsilon^b$ porque si fuesen iguales $\epsilon^a = \epsilon^b \frac{\epsilon^a}{\epsilon^b} = 1 \qquad \epsilon^{a-b} = 1$ con $a - b < n$ y entonces ϵ no será primitiva de orden n.

4) Si es $n = \mu \cdot \nu$ siendo μ y ν primos entre sí el producto de cualquier raíz primitiva α de orden μ por cualquier raíz primitiva β de orden ν es una raíz primitiva de orden n

$$(\alpha \cdot \beta)^n = (\alpha \cdot \beta)^{\mu\nu} = \alpha^{\mu\nu} \cdot \beta^{\mu\nu} = (\alpha^\mu)(\beta^\mu)^\nu = 1$$

luego $\alpha \cdot \beta$ es de orden n.

Vamos a ver si es primitiva.

Busquemos el menor exponente m que cumple la condición

$$(\alpha \cdot \beta)^m = 1$$

$$(\alpha \cdot \beta)^{m\nu} = 1 = \alpha^{m\nu} = \alpha^{m\nu} \cdot 1 = 1$$

luego $m\nu = \dot{\mu}$ y si ν y μ son primos $m = \dot{\mu}$ lo mismo $(\alpha \cdot \beta)^{m\mu} = 1 = \alpha^{m\mu} \cdot \beta^{m\mu} = 1 \cdot \beta^{m\mu} = 1$ y por tanto $m\mu = \dot{\nu}$ y lo mismo que antes $m = \dot{\nu}$ y por tanto $m = \dot{\nu \cdot \mu}$ y si es el menor posible $\mu \cdot \nu = n$ luego $\alpha \cdot \beta$ es raíz primitiva de orden

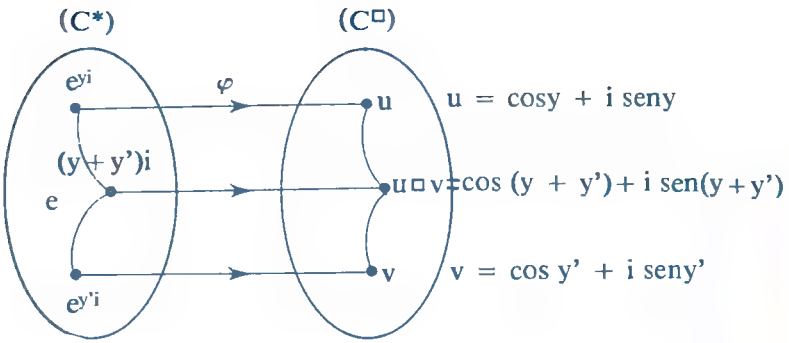
5) Se obtienen todas las raíces primitivas de orden $n = \mu \cdot \nu$ (siendo μ y ν primos entre sí) multiplicando cada raíz primitiva de orden μ por cada raíz primitiva de orden ν.

6) El nº de raíces primitivas de orden n es el indicador de n esto es $\varphi(n)$.

25. FORMA EXPONENCIAL - LOGARITMOS

Vamos a expresar un nº complejo de forma exponencial y decimos que $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Esto será un automorfismo y representará al nº complejo y tendrá las mismas estructuras si se cumple:

Forma exponencial Forma trigonométrica



$$u \cdot v = \cos(y + y') + i \operatorname{sen}(y + y') = \varphi(e^{yi} + e^{y'i})$$

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$e^{x'+y'i} = e^{x'} \cdot e^{y'i} = e^{x'} (\cos y' + i \operatorname{sen} y')$$

$$e^{x+yi} \cdot e^{x'+y'i} = e^x \cdot e^{x'} [\cos(y+y') + i \operatorname{sen}(y+y')] = e^{(x+x')+(y+y')i}$$

el producto de dos complejos es un complejo que tiene como módulo el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos, luego la representación es válida y un complejo $z = r_\alpha = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = e^{Lr+\alpha i}$ que es la representación exponencial.

EL PRIMER FONOGRAFO

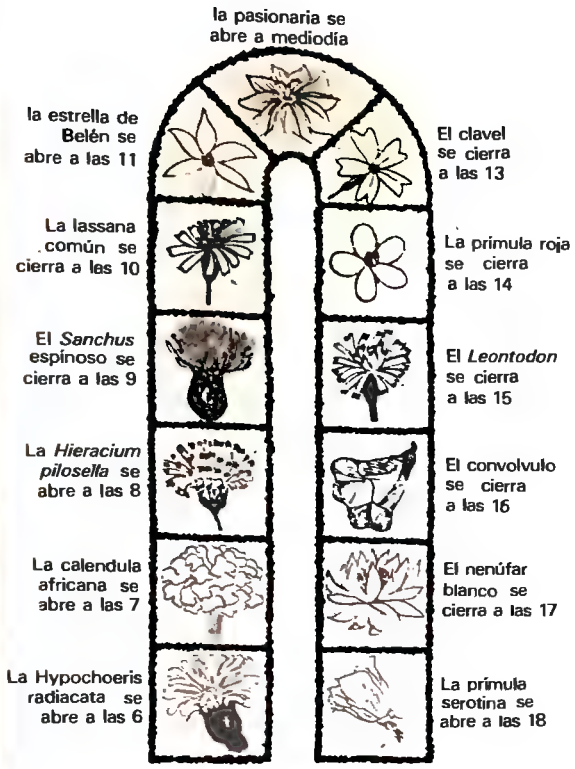
He aquí el sencillo aparato de Edison: un embudo con diafragma vibratorio y aguja; un cilindro revestido con papel de estaño.

EL TRIUNFO DEL PAPEL DE ESTAÑO

La primera registración fonográfica de la historia consitió en la estrofa de apertura de un espiritual pronunciado por Edison en su nueva máquina habladora. Fotografiado en 1878, el ingenio funcionaba cuando las ondas sonoras hacían vibrar una aguja que imprimía la marcha de estas vibraciones sobre un cilindro revestido de papel de estaño. Fue tal la impresión general causada que el mismo presidente de los Estados Unidos, Rutherford B. Hayes, invitó a Edison a la Casa Blanca para felicitarlo.

LA INVENCION RIVAL

También se accionaba a mano el gramófono de Berliner; con la manivela se hacía girar un disco para la incisión y la reproducción.



Conocer la hora con flores era un sistema ingenioso y decorativo adoptado en los jardines formales del pasado siglo. Una serie de arriates se disponía en modo de formar el «cuadrante» del reloj, en el que cada arriate representaba una hora del día. En los varios arriates se sistematizaban por tanto aquellas flores de las que se sabía que se abrían o cerraban a determinada hora. En una jornada de sol era posible, con este sistema, conocer la hora con una aproximación de treinta minutos. Hoy, tales relojes son raros a causa de la dificultad de encontrar y cultivar flores que «contengan el tiempo» en varias estaciones y localidades. Por lo que se refiere a esta ilustración, nos hemos servido de flores comunes en Inglaterra y en los Estados Unidos; los horarios variarán, al menos, según el lugar en que se encuentre el jardín, pero las flores se abrirán o cerrarán siempre con intervalos próximos a una hora.

$$e^{zi} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

$$e^{-zi} = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos z - i \operatorname{sen} z$$

Por tanto

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i(e^{zi} + e^{-zi})}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{(zi)i} &= e^{-z} = \cos(zi) + i \operatorname{sen}(zi) \\ e^{(-zi)i} &= e^{+z} = \cos zi - i \operatorname{sen} zi \end{aligned}\right\}$$

$$\cos zi = \frac{e^{z} + e^{-z}}{z}$$

$$\operatorname{sen} zi = \frac{e^{-z} - e^{z}}{zi} = i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{z}$$

$$\operatorname{tg} zi = i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$$

Como $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$ y $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh} z$$

$$\operatorname{g}(iz) = i \operatorname{th} z$$

$$e^{2K\pi i} = 1$$

26.—LOGARITMOS NEPERIANOS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

$L\mu = z \qquad e^{z} = \mu$ siendo z un n.º complejo $z = x + yi$

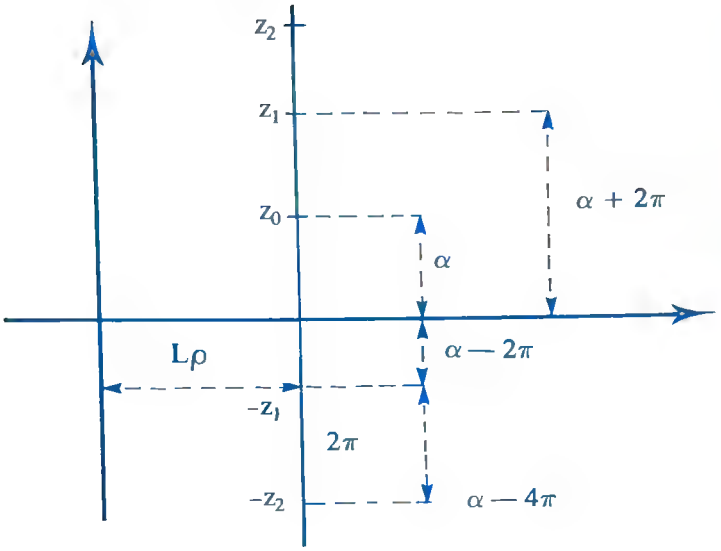
$e^{x+yi} = u$ siendo u por ejemplo un complejo α.

$$e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{x} &= \rho \qquad x = L\rho \\ y &= \alpha + 2K\pi \end{aligned}\right\}$$

$$z = L\rho + (\alpha + 2K\pi)i$$

luego el logaritmo neperiano de un número complejo es otro complejo que tiene por parte real el logaritmo neperiano del módulo y por parte imaginaria el argumento $+2K\pi$ o sea existen en el campo complejo infinitos logaritmos todos ellos con la misma parte real y difieren en la parte imaginaria en 2π uno de otro. Por tanto geométricamente estarán en una recta paralela al eje imaginario de abscisas $x = L\rho$



Se llama valor principal del logaritmo al valor para K =

$z_0 = L\ . + \alpha i$

Caso particular: Reales negativos en el campo complejo, abemos que en el campo real no tienen logaritmo los reales negativos. Vamos a verlo en el conjunto C.

$$\mu = -a = a_\pi$$

$L\mu = z = La + (\pi + 2K\pi)i = La + (2K + 1)\pi i$ y el valor principal

$$z_0 = La + \pi i$$

Tienen infinitos logaritmos.

27.—POTENCIAS DE BASE Y EXPONENTE COMPLEJO

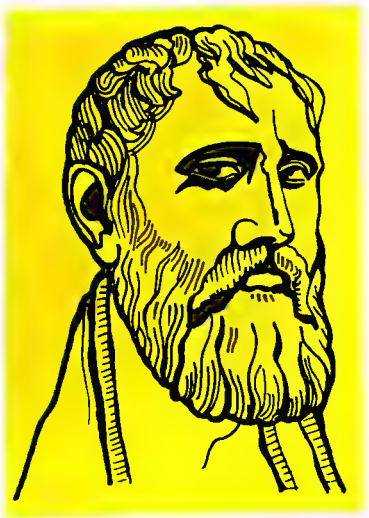
siendo $z \in C$ y $\in C$

$z^\mu = v \qquad e^{Lv} = e^{\mu Lz}$

si $z = a + bi \qquad \mu = p + qi$

$v = e^{(p+qi)Lz} = e^{(p+qi)[L\sqrt{a^2+b^2}+(\text{cotg } b/a+2K\pi)i]}$

operando tendremos el complejo v



PARMENIDES DE ELEA

FILOSOFO griego nacido en Elea Magua (Grecia) en el año 540 a. de J.C., falleciendo el año 450 a. de J.C.

Discípulo de Jonofantes y de Anaximenes. De ambos sacó sus doctrinas haciendo no sólo un pensamiento filosófico, sino estudiándolo y ampliándolo en profundidad hasta tal punto que ellos (sus estudios) son seguidos hoy día en los tratados de filosofía con gran trascendencia.

Estuvo en contra siempre de la doctrina de Heráclito. Mientras éste define que «todo lo que existe se halla en movimiento», Parménides, parte de «el ser es y es imposible que no sea». Esto le lleva a la conclusión de que el ser es único, inmóvil y eterno y por lo tanto no tiene ni principio ni fin. Dicho poema está dividido en tres partes: la primera explica el camino hasta llegar a la diosa Verdad; la segunda indica cómo la diosa muestra el camino de la verdad; y en la tercera muestra el camino de la «apariencia». Con esta definición, creemos queda explicada su doctrina, sintiendo gran desprecio a la humanidad con la excepción de filósofos y pensadores. Su doctrina queda plasmada en su obra «Sobre la naturaleza», en la cual y a lo largo de 154 versos, le lleva a la conclusión que tanto la naturaleza como sus fenómenos no son ni verdaderos ni falsos, sino sólo «aparentes».

UN CARRO USADO EN ORIENTE Y EN OCCIDENTE

Con la caída del Imperio Romano y su fragmentación en belicosos estados feudales, el progreso de los vehículos con ruedas se detuvo. Las carreteras romanas se olvidaron durante siglos en la Edad Media. En este período, el vehículo más práctico fue el carro con dos ruedas que podía viajar sobre terrenos accidentados.

En China, este tipo de carro fue el medio de transporte base durante siglos, sin que los Chinos construyesen jamás carreteras practicables para carros con cuatro ruedas. Solo hacia el año 2.000 a. J.C. se hizo un intento de sustituir los antiguos caminos de herradura que se dirigían desde la capital hacia el interior, Ch'ang-an, por carreteras cascajosas.

continúa en la página siguiente

Caso particular

Siendo μ = a natural $\qquad \mu = a_0$

$z = \rho_\alpha$

$$z^a = v = e^{a(L\alpha+(\alpha+2K\pi)i]} = e^{aL}\ [\cos a(\alpha+2K\pi) + i \operatorname{sen} a\ (\alpha + 2K\pi)]$$

$$= e^{aL}\cdot[\cos a\alpha + i \operatorname{sen} a\alpha] = \rho^a[\cos a\alpha + i \operatorname{sen} a\alpha]$$

28.—TRANSFORMACIONES.

Las propiedades de una función real se ponen de manifiesto geométricamente por la gráfica de la función, curva o superficie según se trate de una función de una variable $y = f(x)$ o de dos $z = f(x, y)$.

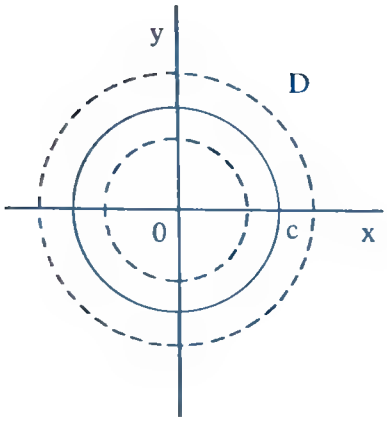
Cuando se trata de la función $w = f(z)$, siendo w y z variables complejas no se dispone de una representación gráfica tan convincente, puesto que se necesita un plano para representar cada una de las variables, estableciéndose una correspondencia entre afijos de z y de w, o lo que es lo mismo si $z = x + yi$ y $w = u + vi$, entre puntos (x, y) y (u, v). A esta correspondencia entre puntos de los dos planos se llama *transformación* de puntos del plano Z en puntos del plano W. Los puntos correspondientes se llaman imágenes uno de otro.

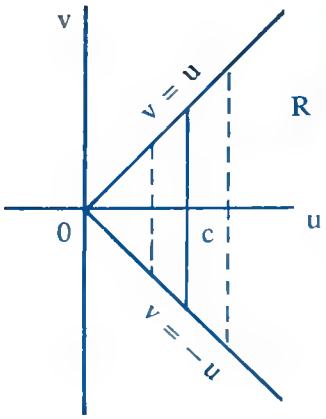
La transformación de curvas y regiones da normalmente más información de la función que la transformación entre puntos aislados.

Ejemplo

Sea la función $W = |z| - iy = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$ en la que el afijo de z describe la circunferencia $x^2 + y^2 = c^2$.

Se verifica $u + vi = c - yi$, cumpliéndose $-c \leq y \leq c$, luego la circunferencia $x^2 + y^2 = c^2$ se transforma en el segmento $u=c$, $-c \leq v \leq c$.





En este caso el dominio de definición D de la función w es todo el plano z mientras que el campo R de la función es solo el cuadrante $u \geq 0$, $-u \leq v \leq u$.

En casos especialmente sencillos pueden superponerse los dos planos, de modo que los ejes OX y OY coincidan con OU y OV.

1) Transformación $w = z + c$

En este caso si es una constante compleja la transformación queda representada geométricamente por una *traslación* de magnitud igual al vector c.

Sea $c = a + bi$, resulta que $z = x + yi$ se transforma en $w = u + vi$ siendo $u = x + a$ y $v = x + b$.

Es decir, toda curva se transforma en la misma curva trasladada y una región en la misma región trasladada.

viene de la página anterior

Cuando en el siglo VII, China, bajo los emperadores T'ang, se convierte en el centro comercial con mayor movimiento en el mundo, carros de mercantes, llegaron desde la lejana Persia transportando mercancías para intercambiar por las sedas y las especias de la China. El carro con dos ruedas chino se introdujo en el Japón feudal en esta época aproximadamente. La ilustración demuestra que, pasados mil años, su forma ha permanecido casi inmutable.

En aquel tiempo, Europa estaba saliendo de las tinieblas de la Edad Media y nuevos vehículos comenzaban a aparecer. En Francia, los ecónomos campesinos adaptaron sus carros a potentes caballos, en origen criados para transportar caballeros medievales: el resultado fue el *tombereau* o carro con remolque que es usado todavía en millares de haciendas.

FIBONACCI Y LOS CONEJOS

Se conoce como sucesiónde Fibonacci aquella que se define:

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
siendo $n \neq 3$

Esta sucesión fue descubierta por Fibonacci matemático medieval de una forma curiosa.

Todo empezó con una pareja de conejos, que Fibonacci supuso que procrearía una nueva pareja al cabo de un mes, la cuál, a su vez, al cabo de dos meses comenzaría a comportarse como sus padres. Fibonacci llegó a la conclusión de que al cabo de n meses el número de parejas a_n, sería $n_{n-1} + a_{n-2}$.
Podemos comprender mejor si razonamos que por cada pareja que nace en el mes anterior nace otra y cada una de aquéllas que nació hace dos meses tendrá otra.

Tan peculiar problema y tan interesante resultado ha sido objeto de muchos estudios por los matemáticos posteriores a Fibonacci.

La extraordinaria difusión de este problema alcanzó tal punto que existe una Asociación Fibonacci que publica la revista: The Fibonacci Quarterly. Y todo empezó con una pareja de conejos.

2) Transformación W = BZ

B es un número complejo constante. Sea $B = b \cdot e^{i\varrho}$, entonces el afijo de $z = r \cdot e^{i\theta}$ se transforma en:

$$W = Bz = b \cdot r \cdot e^{i(\theta + \rho)}$$

es decir la transformación consiste en una rotación del radio vector del punto z, alrededor del origen, igual a ρ = arg. de B, y una dilatación o contracción del radio vector de factor $b = |B|$.

Es decir, que una curva o una región se transforma en la curva o región homotetica, de razón $|B|$, girada un ángulo ρ

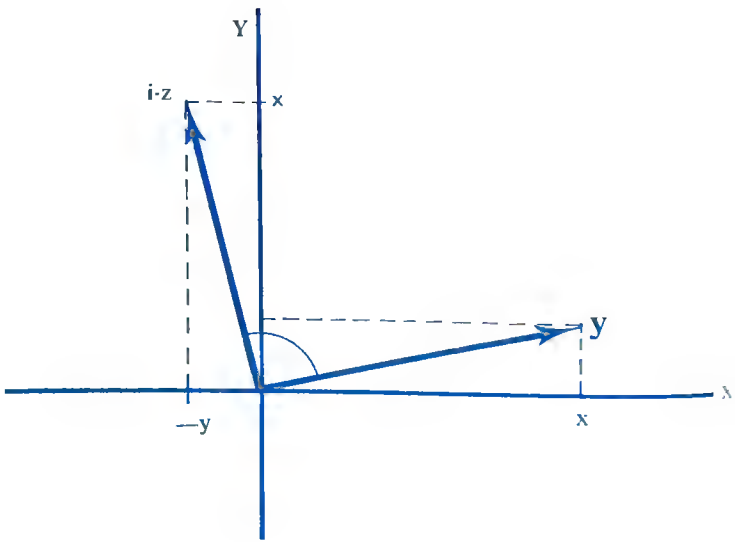
caso particular:

Interpretación geométrica del producto por i.—

Dado un número complejo $z = x + yi$, si lo multiplicamos por i, resulta:

$$i \cdot z = i\,(x + yi) = xi + yi^2 = xi - y$$

Su representación gráfica será



Por tanto, según vemos en la figura, multiplicar un complejo "z" por "i" es equivalente a girar 90° el vector asociado a "z".

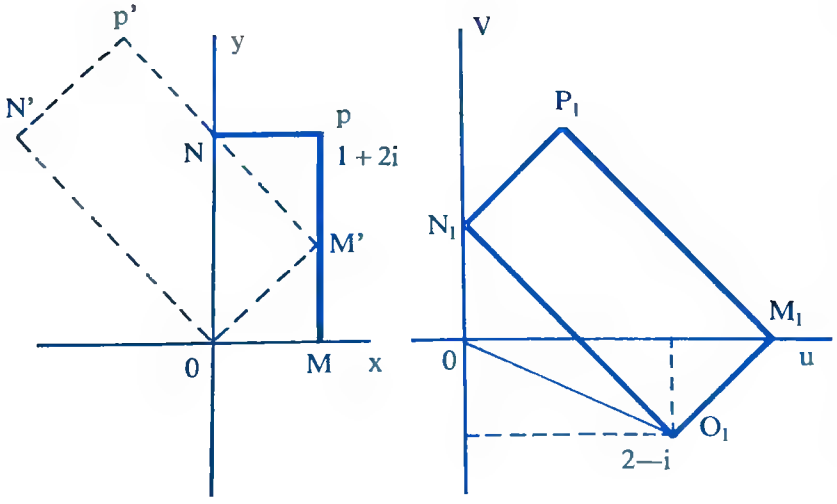
3) Transformación W = BZ C

Como composición de las dos anteriores la transformación $W = BZ + C$ representa un giro de magnitud igual al argumento de B y una homotecia de razón $|B|$, seguida de una traslación igual C.

Ejemplos

1.º) Sea $W = iz$, siendo $z = x + yi$ y $w = u + vi$. La banda $0 < x < 1$ del plano z se transforma en la banda $0 < V < 1$ del plano w, ya que se trata sencillamente de un giro de magnitud $\frac{\pi}{2}$

2.º) Sea $W = (1 + i)z + 2 - i$ y la región del plano z limitada por los ejes coordenados y por rectas paralelas a los mismos trazadas por el punto (1, 2).



La transformación da un nuevo rectángulo obtenido:

a) Por un giro alrededor del origen de amplitud $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

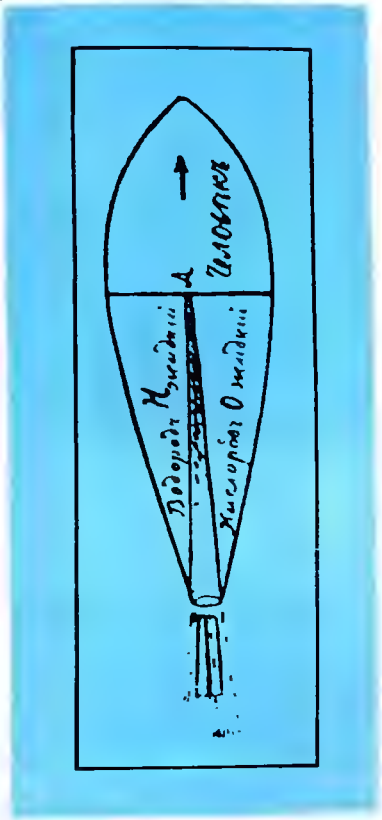
b) Una dilatación de magnitud $|1 + i| = \sqrt{2}$.

c) Una traslación representada por el vector de componentes (2, —1).

NACE UNA INDUSTRIA

1888: Edison posa exhausto al lado del fonógrafo perfeccionado por él mismo en 72 horas de indefenso trabajo para afrontar la competencia.

La maravillosa máquina de Edison, pronto destinada a registrar de todo —desde un «solo» de corneta hasta las célebres arias del melodrama— era sencillísima: un estiléte metálico unido a una membrana vibrante traducía las ondas sonoras en trazados sobre una hoja de papel de estaño envuelta alrededor de un rulo. Volviendo a hacer discurrir la punta a través de los surcos se tenía la reproducción del sonido. El concepto era tan simple que inmediatamente contó Edison con numerosa competencia. En 1886, Chichester Bell (primo de Alexander Graham Bell) y Charles Tainter patentaron el *gramófono*, fundado en el mismo principio pero que ofrecía un mejor sonido ya que empleaba cera en lugar de papel de estaño. En 1887, Emil Berliner presentaba su *gramófono*, en el que los cilindros se sustituían por discos. Edisón creó entonces un nuevo tipo de cilindros, pero era una batalla perdida desde el principio: en efecto, el disco obtuvo la victoria absoluta.



ESQUEMA DE VUELO ESPACIAL

El moderno vuelo espacial fue anticipado con sorprendente precisión en este esquema debido a un entusiasta pionero del espacio, el ruso Constantin Tsiolkovskij, en 1903. En la punta se hospeda el equipaje, mientras que la cola contiene el líquido propulsor que, inmerso en la cámara de combustión (A), lanza el gas hacia atrás, haciendo avanzar así el apareto. Aunque un esquema parecido nunca fue más allá de la fase de proyecto, contine los principios fundamentales utilizados en diversos vehículos espaciales modernos.

4.—Función potencial.

La transformación es $w = z^n$ y como caso particular $w = z^2$.

Sea $z = r \cdot e^{i\theta}$ y $w = \rho \cdot e^{i\varphi}$ se verifica: $\rho \cdot e^{i\varphi} = r^2 \cdot e^{2i\theta}$ y por tanto: $\rho = r^2$,, $\varphi = 2\theta$

En forma binómica: $z = x + yi$,, $w = u + vi$,, resultando:

$u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi$ o sea $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Ejemplos

1º) El primer cuadrante del plano z se transforma en el semiplano superior al eje real del plano w.

2º) La hipérbola de ecuación $2xy = c$ del plano z se transforma en $v = c$ del plano w, es decir en una recta horizontal.

En el caso general de ser $w = z^n$ se opera de igual forma.

5.—Función inversa.

La transformación es $w = \frac{1}{z}$ o su equivalente $z = \frac{1}{w}$.

Esta transformación permite establecer una correspondencia punto a punto excepto para $w = 0$ y para $z = 0$.

En forma módulo argumental si $z = r \cdot e^{i\theta}$ y $w = \rho \cdot e^{i\varphi}$ se verifica:

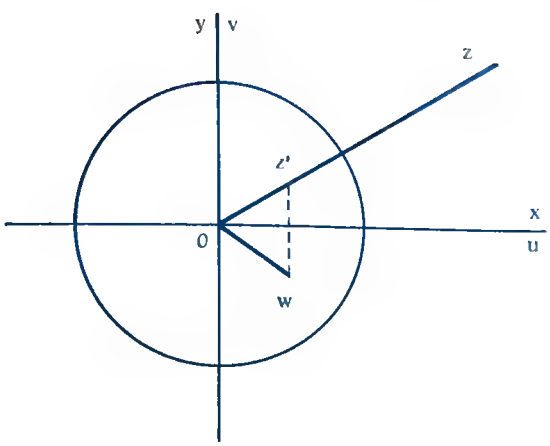
$$\rho \cdot e^{i\varphi} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$$

transformación que puede descomponerse en dos:

$z' = \frac{1}{r} e^{i\theta}$ y $w = \overline{z'}$.

Geométricamente la primera representa una inversión respecto a la circunferencia de centro el origen y radio unidad. La segunda una simetría respecto al eje real.

Si la transformación hubiese sido de la forma $w = \frac{a}{z}$ se obtendría el mismo resultado, solo que la circunferencia seria de radio a.



Como ejemplo se tiene que la región exterior a la circunferencia de radio unidad se transforma en el conjunto de puntos interiores a la circunferencia y viceversa.

En forma binómica:

$$w = u + vi = \frac{1}{x + yi}$$

por tanto:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \,,, v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

o bien:

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \,,, y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

Ejemplo

Si z recorre la circunferencia $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ resulta:

$$a\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} + b\frac{u}{u^2 + v^2} + c\frac{-v}{u^2 + v^2} + d = 0$$

o sea:

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

es decir, que si la circunferencia no pasa por el origen [$d \neq 0$], se transforma en otra circunferencia que tampoco pasa por el origen ya que *a* ha de ser distinto de 0. Por el contrario si la circunferencia dada pasa por el origen se transforma en una recta y viceversa.

Las rectas que pasan por el origen: $bx + cy = 0$ se transforman evidentemente en rectas que también pasan por el origen.

EJERCICIOS Y SOLUCIONES

1.—Dados el número complejo $z_1 = 1 - 3i$, escribir su opuesto, su conjugado y su inverso.

Solución

a) Opuesto.— $z_1 = -1 + 3i$

b) Conjugado. $\overline{z_1} = +1 + 3i$

c) Inverso. $z^{-1}_1 = \frac{1}{1 - 3i} = \frac{1+3i}{1+9} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

VOLVER A LA ESTABILIDAD

La estabilidad respecto al balanceo se consigue inclinando hacia arriba las alas del avión, es decir, realizando un ángulo «diedro». En el vuelo horizontal, ambas alas tienen la misma capacidad de vuelo (arriba). Si un golpe de viento inclina un ala hacia arriba, el avión se balancéa y tiende a deslizarse de lado hacia la parte más baja. Este deslizamiento lateral produce un flujo posterior de aire bajo este ala. Este «viento relativo», aumentando la capacidad de vuelo del ala bajada, conduce el aparato a la horizontal.

COMO SE MANTIENEN EL EQUILIBRIO BAJO EL NIVEL DEL MAR

Un submarino que se encuentra bajo el nivel de las aguas del mar tiene problemas muy similares a los de un aeroplano en vuelo. Debe estar capacitado para sumergirse, para volver a la superficie y para moverse en el líquido elemento. Durante las maniobras su estabilidad puede ser comprometida por corrientes, por las operaciones de lastre para regular la profundidad o bien por la aparición de las olas bajo el nivel del mar.

La estabilidad es una cuestión de particular importancia para un submarino de tipo nuclear como el *George Weshington* de 116 metros de longitud, cuyo modelo a escala reducida, ilustrado en estas páginas, es sometido a pruebas en balsa. El *George Washington* ha sido construido con una plataforma de lanzamiento submarino alrededor del casco, con una longitud aproximada de 39 metros, proyectada para lanzar 16 misiles en el arco de pocos minu-

continúa en la página siguiente

Para resolverlo, multiplicamos numerador y denominado por el conjugado

$$\frac{1}{1-3i} = \frac{1(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i}{1+9} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\,i$$

2.—Calcula el inverso de $z_1 \cdot z_2$ y comprueba que coincide con

$$\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \text{ siendo } z_1 = 2 + i \text{ y } z_2 = 3 - i.$$

Solución

Efectuamos

$$z_1 \cdot z_2 = (6 + 1) + (3 - 2)i = 7 + i$$

Ahora calculamos el inverso de z_1, z_2 y $z_1 \cdot z_2$.

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2+i} = \frac{1(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{3-i} = \frac{1(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

$$\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{7+i} = \frac{1(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{7-i}{49+1} = \boxed{\frac{7}{50} - \frac{1}{50}i}$$

Vamos a comprobar que el producto de

$$\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 \cdot z_2}$$

sería

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i\right) = \left(\frac{6}{50} + \frac{1}{50}\right) + \left(-\frac{3}{50} + \frac{2}{50}\right)i =$$

$$= \boxed{\frac{7}{50} - \frac{1}{50}i}$$

queda por tanto comprobada la igualdad.

3.—Hallar las raíces reales y complejas de $x^4 - 16 = 0$

Solución

Expresamos $x^4 - 16$ como una diferencia de cuadrados

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = 0$$

a su vez la diferencia de cuadrados la podemos poner como el producto de una suma por una diferencia.

$$(x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

Para que esto se cumpla tiene que ser

$$x^2 - 4 = 0 \quad y \quad x^2 + 4 = 0$$

de donde

$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{2}$ → raíces reales.

$x^2 + 4 = 0$
$x^2 = -4$
$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$
raíces complejas.

4.—Calcular el cociente de números complejos

$$\frac{4 + 2i}{-3 - i}$$

Solución

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{4 + 2i}{-3 - i} = \frac{(4 + 2i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \frac{(-12 - 2) + (-6 + 4)i}{9 + 1} =$$

$$= \frac{-14 - 2i}{10} = \frac{-14}{10} - \frac{2}{10}i = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

5.—Resolver la ecuación $x^2 + 3 - 4i = 0$

Solución

Despejamos primero x^2 de la ecuación

$$x^2 = -3 + 4i$$

El valor de "x" será la raíz cuadrada de $-3 + 4i$.

Si llamamos a, $x = a + bi$, nos resulta el sistema

$a^2 - b^2 = 3$
$2ab = 4$

Elevamos al cuadrado ambos miembros del sistema y nos queda:

$a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 = 9$
$4a^2 b^2 = 16$

Sumando nos queda:

$a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 = 25$

que lo podremos expresar en forma de un cuadrado perfecto.

$$(a^2 + b^2)^2 = 25$$

viene de la página anterior

tos, y para la defensa de la superficie marina. Este submarino posee un ordenador para sincronizar el ritmo de lanzamiento de los misiles con su propio balanceo cuando se encuentra en navegación bajo la superficie del mar.

Al laboratorio Davidson se le asignó la misión de poner a prueba el submarino a fin de determinar sus límites de movimiento y, por tanto, para establecer las necesidades a las que debe responder el ordenador. En un modelo a escala 1:80, se sistematizaron pesos que representaban, por ejemplo, 32 kilómetros de tuberías, 130 kilómetros de cables, etc., en forma tal que se simulaba el verdadero centro de gravedad del submarino. El trabajo de sistematización de los pesos precisó más de un mes de esfuerzos y llevó el coste del modelo por encima de los 5.000 dólares. Pero esa suma aseguró que un submarino valorado en 6.000 millones de pesetas lanzaría misiles.

EL BALANCEO BAJO EL MAR

Cuando la ola pasa de un costado a otro del modelo, provoca un movimiento de balanceo; la oscilación es debida a diminutos, pero igualmente peligrosos, efectos de las olas bajo la superficie del agua. A una profundidad correspondiente a la mitad de su longitud, una ola conserva aproximadamente el 4% de su movimiento en superficie.

CARACTERISTICAS ESENCIALES DEL VUELO

El conjunto de diseños del departamento de proyectos de una industria aeronáutica ilustra la lucha continua de compromisos que constituyen la base del proyecto de un avión. Sobre una serie de dibujos los diseñadores trasladan los proyectos recavados de los numerosos proyectos técnicos especializados. El especialista de aerodinámica, por ejemplo, prevee una estructura con alas sutilísimas y armazón de hoja de cuchillo, sin la más mínima protuberancia, que tendría el efecto de aumentar la resistencia al aire. El técnico de motores asigna de mala gana una cabina minúscula y ocupa el espacio restante con un motor enorme. Para el especialista de las estructuras un avión es sólo una pareja de «I» cruzadas, lo suficientemente robustas como para soportar los golpes de un martinete. El especialista en navegación aérea querría acumular sobre la superficie externa una gran variedad de antenas; el punto esencial del proyecto es una enorme cabina repleta de los tipos más variados de instrumentos. Las características de cada proyecto especializado exageran a voluntad para demostrar la necesidad de recurrir a compromisos. Es menester, sin embargo, tener presente también otro hecho: un aeroplano, para tener una función práctica, debe concebirse en su conjunto, y no como yuxtaposición de cada una de las componentes, cuya eficiencia está limitada a un funcionamiento aislado. El proyecto definitivo debe tener en cuenta las interacciones entre las cuatro componentes fundamentales de un aeroplano: aerodinámica, propulsión, estructura y control.

continúa en la página siguiente

Tomando la «solución positiva», tendremos

$$a^2 + b^2 = 5$$

De aquí, nos resulta el siguientes sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = -3 \end{array}\right\}$$ Sumando tendremos:

$$2a^2 = +2 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Restando el sistema anterior:

$$2b^2 = 8 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = \pm 2$$

Por tanto, las soluciones serán:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 + 2i \\ x_2 = -1 - 2i \end{array}}$$

6.—Se tienen dos números complejos: $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, cuya suma es: $3 + 2i$; sabiendo que la parte real de uno de ellos es 2 y su cociente es imaginario (i), hallar dichos números.

Solución

Sabemos que $z_1 + z_2 = 3 + 2i$, por tanto, se verifica:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = 3 + 2i$$

Por la igualdad de números complejos tendremos que la parte real y la imaginaria deben ser iguales:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$y_1 + y_2 = 2$$

Suponiendo que la parte real de z_1 sea 2, es decir $x_1 = 2$, de la igualdad anterior $x_1 + x_2 = 3$ resulta que: $x_2 = 1$

Nos falta por conocer la parte imaginaria.

Calculamos el cociente $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{2 + y_1 i}{1 + y_2 i}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado de $1 + y_2 i$; $\frac{2 + y_1 i}{1 + y_2 i} = \frac{(2 + y_1 i)(1 - y_2 i)}{(1 + y_2 i)(1 - y_2 i)} =$

$$= \frac{(2 + y_1 y_2) + (y_1 - 2y_2)i}{1 + (y_2)^2} = \frac{2 + y_1 y_2}{1 + (y_2)^2} + \frac{(y_1 - 2y_2)i}{1 + (y_2)^2}$$

Imponiendo la condición de que este cociente es imaginario, deberá ocurrir que la parte real se anule, es decir:

$\frac{2 + y_1 y_2}{1 + (y_2)^2} = 0$; y para que esto sea «cero», el numerador tendrá que ser «cero».

$$y_1 y_2 + 2 = 0 \rightarrow y_1 y_2 = -2$$

Nos aparece el siguiente sistema:

$$y_1 + y_2 = 2$$
$$y_1 \cdot y_2 = -2$$

Para resolverlo, multiplicamos la primera igualdad por "y_2", y nos queda:

$$y_1 y_2 + (y_2)^2 = 2y_2$$

Restando tendremos:

$$(y_2)^2 = 2y_2 + 2 \rightarrow (y_2)^2 - 2y_2 - 2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado:

$$y_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Una vez hallado el valor de y_2, calculamos el de "y"

$$y_1 + y_2 = 2 \rightarrow y_1 = 2 - y_2 \rightarrow y_1 = 2 - (1 \pm \sqrt{3})$$

La solución del problema será:

$$z_1 = 2 + (1 - 2\sqrt{3})i$$
$$z_2 = 1 + (1 + 2\sqrt{3})i$$

Problema 7

Expresar en sus restantes formas y representar gráficamente el complejo $6_{240°}$

Solución

$$6_{240°} = 6\,(\cos 240° + \operatorname{sen} 240°\, i)$$

Para encontrar el valor de la forma binómica es necesario saber el valor del seno y coseno de 240°. Esto es fácil si vemos que 240° es la suma de 180° y 60°, pudiendo por tanto encontrar el valor bien por la fórmula de la adición, bien por una simple representación gráfica, como se ve aquí.

viene de la página anterior

Estos elementos fundamentales, incorporados racionalmente ponen al aparato en condiciones de vencer la fuerza de la gravedad y volar. El vuelo con aviones provistos de alas, con o sin motor, no es sin embargo el único sistema empleado por el hombre para elevarse sobre la superficie de la tierra. Antes que los primeros aviones se construyesen, la fuerza de la gravedad era vencida con globos «más ligeros que el aire».

Y precisamente el poder «flotante» de los globos, hizo realidad por vez primera el sueño de volar. Estos grandes sacos de gas capaces de elevar al hombre podían realizarse concretamente tras el descubrimiento, acaecido hacia finales del siglo XVIII, de que el hidrógeno es realmente más ligero que el aire. Alrededor de 1766 un famoso científico inglés, Henry Cavendish, rellenó una vejiga con hidrógeno, al que denominó aire «artificial» y se dió cuenta de que pesaba menos que cuando se rellenaba con aire común. Sin embargo, para Cavendish se trataba simplemente de un fenómeno físico y ni siquiera consideró las posibles aplicaciones aeronáuticas. Fue otro científico, Jacques Charles, quién aprovechó las características de elevación del hidrógeno 17 años más tarde. La primera aplicación práctica de las propiedades de dichos globos fue realizada, no obstante, por los hermanos Montgolfier en Francia.

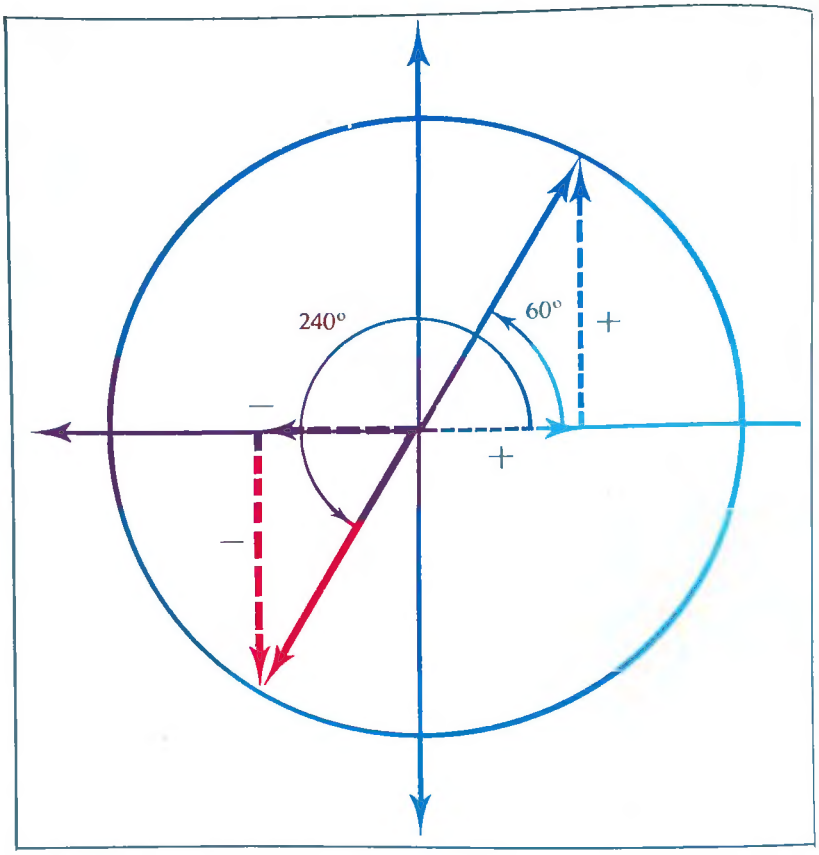
continúa en la página siguiente

viene de la página anterior

Cómo llegasen los Montgolfier a su realización se ha dicho y repetido tan a menudo que es difícil separar la realidad de la fantasía. Según la versión más común de la historia, Joseph Montgolfier, el mayor de los hermanos, una tarde del invierno de 1782, se encontraba observando ociosamente el fuego de su chimenea y las vagas espirales de humo que ascendían, cuando, de improviso, cogió un pedazo de seda, lo modeló en forma de saco con la extremidad inferior abierta y, poniéndolo sobre el fuego, lo dejó rellenarse de aire caliente y humo. Cuando lo soltó, el saquito se elevó hasta el techo.

Los hermanos Montgolfier no se detuvieron sin embargo con este éxito inicial sino que efectuaron experimentos más ambiciosos con globos mayores. En el plazo de seis meses, utilizando braseros externos como fuente de calor, enviaron un globo a la altura de 1.500 m, frente a un enorme masa de espectadores. La noticia de los áxitos de los Montgolfier alcanzó al rey Luis XVI, quien ordenó que se realizase una exhibición en Versalles. Para la ocasión, los Montgolfier construyeron un globo decorado atentamente y decidieron, como motivo posterior de interés, enviar animales para saber si sobrevivirían a grandes alturas.

continúa en la página siguiente



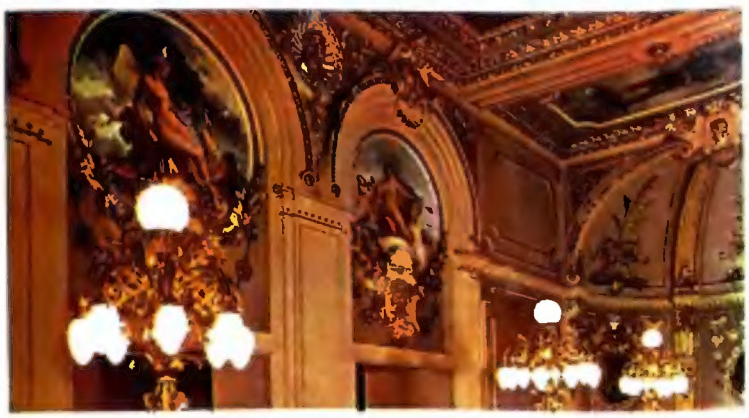
Fijándonos en la gráfica, se ve:

$$\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

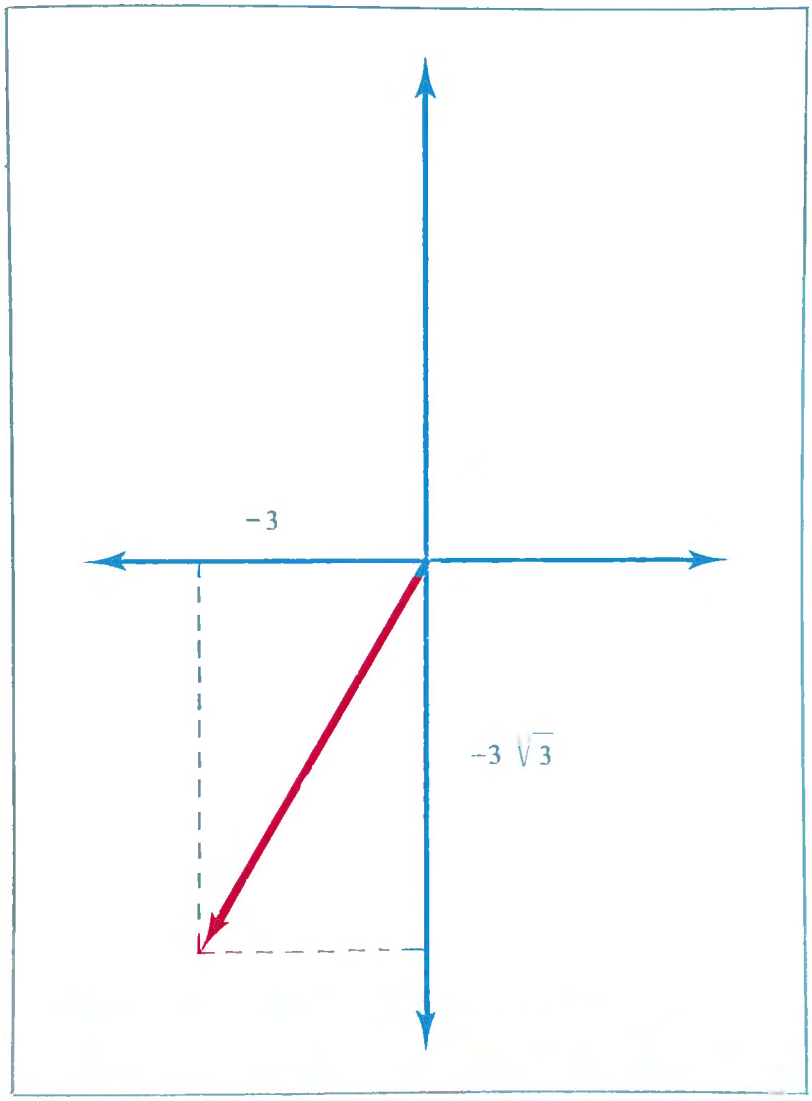
Pasando estos valores a la expresión trigonométrica, tendremos:

$$6_{240^\circ} = 6(\cos 240^\circ + \text{sen } 240^\circ \text{i}) = 6\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{i}\right) =$$
$$= -\frac{6}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{2}\,\text{i} = -3 - 3\sqrt{3\text{i}} = (-3, -3\sqrt{3})$$



Expresión binómica $= -3 - 3\sqrt{3}i$

Expresión cartesiana $= (-3, -3\sqrt{3})$



viene de la página anterior

Una oveja, un pato y una gallina «despegaron» desde Versalles, el 19 de septiembre de 1783, en una cesta de mimbre suspendida del globo. El vuelo duró ocho minutos, el globo cubrió dos kilómetros de distancia y los animales, al final del vuelo, no mostraban efecto alguno dañino para su salud. Los Montgolfier decidieron inmediatamente construir un globo para transportar seres humanos.

Este nuevo modelo era alimentado por un brasero para autosostener el vuelo. Se precisaron dos meses y numerosos experimentos con el globo anclado en tierra antes de que el mismo estuviese preparado y, por fin, los Montgolfier concluyeron que habia llegado el momento. La noticia del vuelo inminente se difundió por toda Francia y de todas partes llegaron muestras de apoyo. El propio Luis XVI se interesó activamente, llegando a ofrecer dos criminales ya condenados a muerte como pasajeros. Esta oferta puso furioso a Jean-François Pilâte de Rozier, un joven médico fanático de los globos. «¿Dos abyectos criminales tendrán el honor de subir por primera vez al cielo?» clamó. «Iré yo mismo»

continúa en la página siguiente